

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ВІННИЦЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

А. В. Рудик

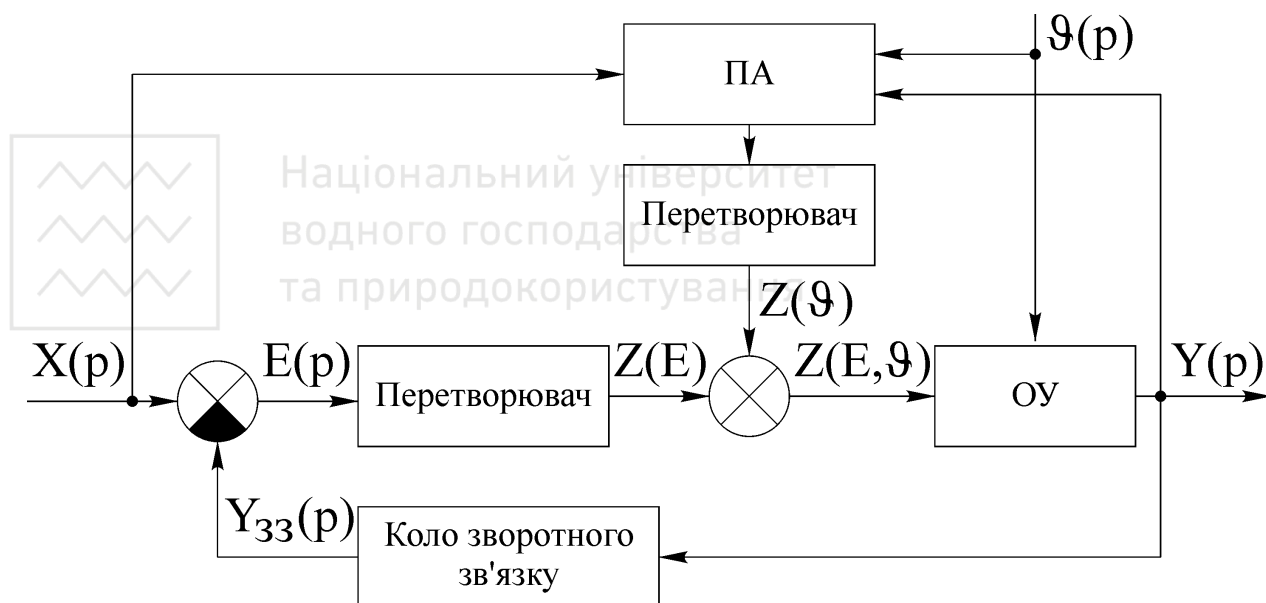


Національний університет
водного господарства
та природокористування

РАДІОАВТОМАТИКА

Частина 1

ЛІНІЙНІ СИСТЕМИ РАДІОАВТОМАТИКИ



Вінниця ВДТУ 2001

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ВІННИЦЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

А. В. Рудик



Національний університет
водного господарства
та природокористування

РАДІОАВТОМАТИКА

Частина 1

ЛІНІЙНІ СИСТЕМИ РАДІОАВТОМАТИКИ

Затверджено Ученою радою Вінницького державного технічного університету як навчальний посібник для студентів спеціальностей 7.090701 “Радіотехніка” та 7.090703 “Апаратура радіозв’язку, радіомовлення та телебачення”. Протокол № 11 від 29 червня 2000 р.

Вінниця ВДТУ 2001

УДК 621.3
Р 34

Рецензенти:

В.С.Осадчук, доктор технічних наук, професор
Р.Н.Кветний, доктор технічних наук, професор
О.В.Бісікало, кандидат технічних наук, доцент



Національний університет
водного господарства
та природокористування

Рекомендовано до видання Ученою радою Вінницького державного технічного університету Міністерства освіти і науки України

Рудик А.В.

Р 34 Радіоавтоматика. Частина 1. Лінійні системи радіоавтоматики.

Навчальний посібник. – Вінниця: ВДТУ, 2001. – 158 с.

В навчальному посібнику наведені теоретичні відомості щодо основних методів описання лінійних неперервних систем радіоавтоматики. Розглянуто основні передаточні функції та характеристики таких систем, а також питання дослідження стійкості та визначення показників якості роботи. Проаналізовано основні питання проектування систем радіоавтоматики. Наведені практичні приклади аналізу та розрахунку лінійних систем радіоавтоматики.

Навчальний посібник призначений для студентів вузів, які навчаються за спеціальностями 7.090701 “Радіотехніка” та 7.090703 “Апаратура радіозв’язку, радіомовлення та телебачення”.

УДК 621.3

© А. Рудик, 2001

З М І С Т

Вступ.....	6
1 Основні поняття та визначення.....	8
1.1 Алгоритм вивчення та порядок оцінки досліджуваних систем.....	8
1.2 Типові системи автоматизованого управління.....	8
1.3 Узагальнена функціональна схема АСУ.....	9
1.4 Основні алгоритми функціонування АСУ.....	10
1.5 Основні принципи управління, що лежать в основі АСУ.....	11
1.6 Класифікація АСУ.....	13
Контрольні запитання.....	13
2 Математичні методи описання лінійних неперервних АСУ.....	14
2.1 Загальна характеристика методів.....	14
2.2 Використання диференціальних рівнянь.....	14
2.3 Використання передаточних функцій.....	17
2.4 Використання перехідної та імпульсної характеристик.....	19
2.5 Використання інтегралу згортки.....	22
2.6 Використання частотних передаточних функцій.....	23
2.7 Використання логарифмічних частотних характеристик.....	27
Контрольні запитання.....	33
3 Передаточні функції АСУ.....	34
3.1 З'єднання кіл АСУ.....	34
3.2 Перетворення структурних схем лінійних АСУ.....	37
3.3 Передаточна функція замкненої системи.....	42
3.4 Передаточна функція розімкненої системи.....	43
3.5 Передаточна функція для сигналу розузгодження.....	44
3.6 Передаточна функція для помилки за завадою.....	45
3.7 Типові передаточні функції АСУ.....	46
3.8 Передаточні функції багато контурних систем.....	47
Контрольні запитання.....	49
4 Типові динамічні кола лінійних АСУ.....	50
4.1 Класифікація динамічних кіл лінійних АСУ.....	50
4.2 Аперіодичне коло першого порядку.....	51

4.3 Без інерційне коло.....	52
4.4 Коливальне коло.....	55
4.5 Аперіодичне коло другого порядку.....	57
4.6 Ідеальне диференціювальне коло.....	59
4.7 Інерційне диференціювальне коло.....	62
4.8 Форсувальне коло.....	63
4.9 Ідеальне інтегрувальне коло.....	65
4.10 Ізодромне коло.....	66
4.11 Інерційне інтегрувальне коло.....	68
4.12 Коло з чистим запізненням.....	68
4.13 Немінімальнофазові кола.....	70
Контрольні запитання.....	73

5 Методи дослідження стійкості лінійних аналогових АСУ..... 74

5.1 Поняття стійкості та її різновиди.....	74
5.2 Необхідні та достатні умови стійкості.....	75
5.3 Алгебраїчні критерії стійкості.....	78
5.4 Частотні критерії стійкості.....	82
5.5 Запаси стійкості та способи їх визначення.....	87
5.6 Оцінка стійкості за логарифмічними частотними характеристиками.....	91
5.7 Стійкість АСУ з запізненням.....	92
5.8 Статична система, яка буде стійкою в розімкненому стані.....	94
5.9 Астатична система з астатизмом першого порядку.....	95
5.10 Астатична система з астатизмом другого порядку.....	96
5.11 Абсолютно стійкі та умовно стійкі системи.....	97
Контрольні запитання.....	100

6 Показники якості роботи АСУ..... 101

6.1 Загальна характеристика показників якості.....	101
6.2 Показники якості в усталеному режимі.....	102
6.3 Визначення статичних помилок для розімкнених та замкнених систем.....	103
6.4 Способи зменшення та виключення статичних помилок.....	104
6.5 Показники якості перехідного процесу.....	107
6.6 Способи оцінки показників якості перехідних процесів.....	109

6.7 Оцінка перехідних процесів за видом дійсних частотних характеристик.....	113
6.8 Аналіз точності роботи АСУ.....	120
6.9 Середньоквадратична помилка АСУ.....	123
6.10 АСУ з білим шумом на вході.....	127
Контрольні запитання.....	131

7 Проектування систем автоматизованого управління. 132

7.1 Основні положення. Постановка задачі.....	132
7.2 Бажана передаточна функція розімкненої системи.....	134
7.3 Визначення передаточних функцій пристроїв корегування.....	137
7.4 Комплексні АСУ.....	149
Контрольні запитання.....	155

Література..... 156



Національний університет
водного господарства
та природокористування



Національний університет
водного господарства
та природокористування

ВСТУП

В сучасних радіотехнічних пристроях різного призначення та системах радіоуправління використовуються автоматичні системи, які називають системами радіоавтоматики (системами РА). До таких систем відносяться системи частотного та фазового автопідстроювання частоти, автоматичного регулювання підсилення, вимірювачі відстані, різноманітні стежні фільтри, системи вимірювання координат рухомих об'єктів і т. і.

Радіоавтоматика – це наука про загальні принципи та методи побудови систем автоматичного управління в радіотехніці та радіоелектроніці, тобто систем, які виконують поставлені перед ними задачі без безпосередньої участі людини (оператора). Системи РА можна розділити на два основних класи: розімкнені (циклічні), які діють за жорсткою програмою, та замкнені (ациклічні), які діють на основі принципу зворотного зв'язку.

Виділення систем РА в самостійний клас обумовлено їх особливостями, пов'язаними з умовами роботи у складі радіотехнічних пристроїв та систем радіоуправління, в яких відбувається обробка параметрів радіосигналів на фоні різного типу завад.

Надійність та якість систем РА багато в чому визначає характеристики радіоапаратури та систем радіоуправління.

Системи РА почали використовуватися в 30–х роках двадцятого сторіччя для автоматичного регулювання підсилення в приймачах. Розвиток радіотехнічних пристроїв викликав не тільки підвищення вимог до якості роботи систем РА, але і до їх функціонального ускладнення, в результаті чого багато технічних задач вже не можуть бути вирішені за допомогою систем РА, що базуються на аналоговій техніці. Тому в наш час в радіотехнічних системах та системах радіоуправління дуже поширені системи РА, які засновані на останніх досягненнях мікроелектроніки та мікропроцесорної техніки.

Методи аналізу та проектування сучасних систем РА можуть бути розділені на дві групи. Перша група заснована на добре відомих перетвореннях Лапласа, Фур'є та Z – перетворенні. Друга група використовує поняття простору станів та дозволяє оцінювати процеси в системах РА в області дійсного змінного. Використання другої групи методів пов'язано з використанням великого обсягу складних обчислень, які можуть бути реалізовані переважно на ЕОМ. Тому при аналізі та синтезі систем РА велику роль відіграють методи моделювання як на аналогових обчислювальних машинах, так і на цифрових.

Статистичний підхід до аналізу та синтезу систем РА обумовлений вирішенням проблеми оптимальної побудови систем автоматичного управління. В результаті вирішення цієї проблеми були розроблені критерії

якості (критерії оптимальності) у вигляді функціоналів, які слід мінімізувати в процесі синтезу системи РА.

Оптимальні методи проектування характерні не тільки для систем автоматичного регулювання та управління. Ці методи в наш час знаходять використання практично у всіх галузях науки, техніки та економіки.

Слід відзначити, що вирішення задач оптимізації потребує знання апріорної інформації про сигнали, що діють в системі, а саме знання їх статистичних характеристик (кореляційних функцій, спектральних густин, функцій розподілу і т. і.). Тому прийняті в процесі синтезу системи статистичні характеристики системи можуть значно відрізнятися від характеристик реальних сигналів, тобто більшість методів оптимального синтезу можна використовувати тільки в тих випадках, коли є впевненість у тому, що прийняті при розрахунках статистичні характеристики сигналів будуть близькими до реальних.

Розробка та проектування систем РА є складною задачею, яка складається з таких етапів:

- визначення параметрів та характеристик об'єкта регулювання і умов його роботи; складання математичних моделей;
- формулювання вимог до системи РА;
- вибір структури та попередньої схеми;
- вибір елементів схеми з урахуванням статичних, динамічних, енергетичних та експлуатаційних вимог;
- визначення законів регулювання та розрахунок пристроїв корегування, які забезпечують задані вимоги;
- уточнення структурної схеми системи РА, вибір та розрахунок її елементів і параметрів;
- експериментальні дослідження системи РА (або її окремих частин) в лабораторних умовах та внесення відповідних уточнень в її схему і конструкцію;
- проектування та виробництво системи РА;
- налаштування системи РА в реальних умовах її роботи.

Основною метою навчального посібника є викладення основ вказаних методів аналізу та синтезу систем РА. Знання, отримані студентами в процесі вивчення курсу “Основи радіоавтоматики”, будуть корисні при вивченні наступних дисциплін навчального плану підготовки спеціалістів в області радіотехніки та радіозв'язку, особливо при вивченні другої частини курсу – дисципліни “Радіоавтоматика”.

1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ВИЗНАЧЕННЯ

1.1 Алгоритм вивчення та порядок оцінки досліджуваних систем в радіоавтоматиці

Алгоритм вивчення будь-якої системи радіоавтоматики (РА) можна розділити на п'ять основних етапів:

1) з'ясування принципу дії системи РА з позицій теорії автоматичного регулювання (необхідно визначити об'єкти автоматичного регулювання, керуючі елементи, кола зворотного зв'язку, елементи порівняння, задавачі й ін.);

2) складання математичної моделі системи, під чим будемо вважати складання еквівалентної структурної схеми системи РА та її математичний опис;

3) дослідження стійкості системи РА, тобто визначення умов стійкості системи та запасів стійкості за амплітудою та фазою;

4) дослідження показників якості в усталеному режимі (визначення статичних похибок для розімкненої та замкненої систем, а також способи зменшення та виключення статичних похибок) та в перехідних режимах (прямі та непрямі методи оцінки перехідних процесів);

5) корекція відповідних показників якості досліджуваних систем РА (паралельна, послідовна та комбінована).

Для оцінки досліджуваних систем в радіоавтоматиці необхідно:

1) визначити основні (функціонально обов'язкові) та допоміжні кола системи РА;

2) визначити основні сигнали, що діють в системі;

3) оцінити систему за наведеними нижче основними класифікаційними ознаками.

1.2 Типові системи радіоавтоматики

Системи РА функціонують на основі автоматичного вимірювання та подальшого перетворення вхідного сигналу, в якості якого можуть бути використані різні параметри сигналів: електрична напруга в системах стабілізації джерел живлення; частота або фаза напруги в системах автоматичного підстроювання частоти, напрямок приходу радіолокаційного сигналу в системах автоматичного супроводження станцій (РЛС) за кутовими координатами і т. ін. До типових систем РА можна віднести такі системи:

1) системи стабілізації (найбільш поширені системи) – автоматичного регулювання підсилення (рис.1.1, а), частотного та фазового автопідстроювання частоти, а також різноманітні стабілізатори напруг;

2) різноманітні стежні системи, наприклад, потенціометрична система стеження (рис.1.1, б);

3) системи автоматичного супроводження за дальністю та кутом повороту;

4) екстремальні регулятори – системи, які забезпечують автоматичний пошук та фіксацію екстремуму (мінімуму або максимуму) нелінійної статичної характеристики, що описує властивості об'єкта регулювання, наприклад, система автоматичного налаштування контурів радіопередавача (рис.1.1, в);

5) системи самоконтролю або оптимальні системи, вирішення задачі оптимізації в яких відбувається при оптимальній фільтрації (лінійній та нелінійній) і при використанні теорії оптимальних систем автоматичного управління;

6) багатофункціональні кібернетичні системи, які в останній час все більше і більше використовуються в радіотехніці та системах РА.

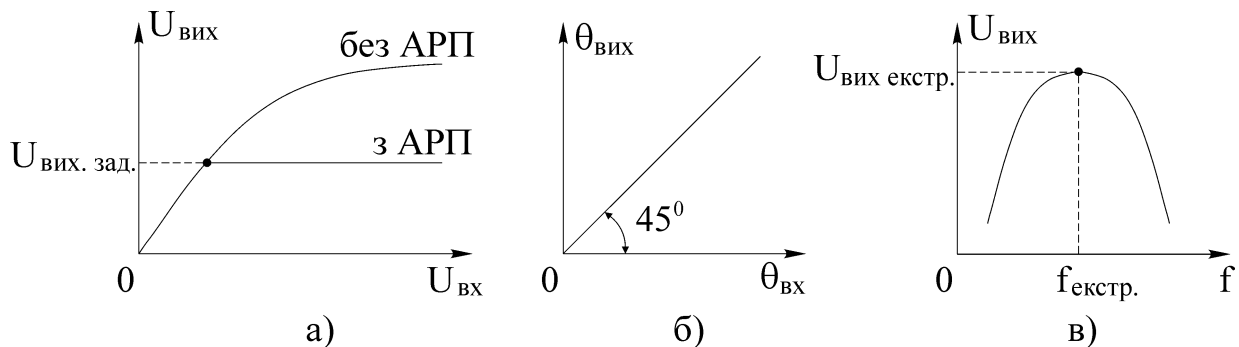


Рисунок 1.1 – Статичні характеристики систем: а) – автоматичного регулювання підсилення; б) – потенціометричної системи стеження; в) – системи автоматичного налаштування контурів радіопередавача

1.3 Узагальнена функціональна схема системи радіоавтоматики

Основними складовими процесу управління є:

- 1) завдання мети управління;
- 2) визначення результату управління;
- 3) порівняння результату управління з метою управління та вироблення сигналу розузгодження;
- 4) вироблення на основі сигналу розузгодження сигналу управління з метою досягнення результатом управління мети управління.

На основі розглянутих складових процесу управління можна скласти узагальнену функціональну схему системи РА, наведену на рис.1.2.

В будь-якій замкненій системі РА є функціонально обов'язкові сигнали:

- вхідний сигнал $X(t)$, який визначає алгоритм роботи системи;
- вихідний сигнал $Y(t)$, який є результатом управління;
- вихідний сигнал кола зворотного зв'язку $Y_{зз}(t) = K_{зз} Y(t)$, де $K_{зз}$ – коефіцієнт передачі кола зворотного зв'язку;
- сигнал розузгодження $E(t) = X(t) - Y_{зз}(t)$ (для ідеального циклу управління $E(t) = 0$);
- сигнал управління $Z(t) = f[E(t)]$, який після відповідного підсилення безпосередньо діє на об'єкт управління.

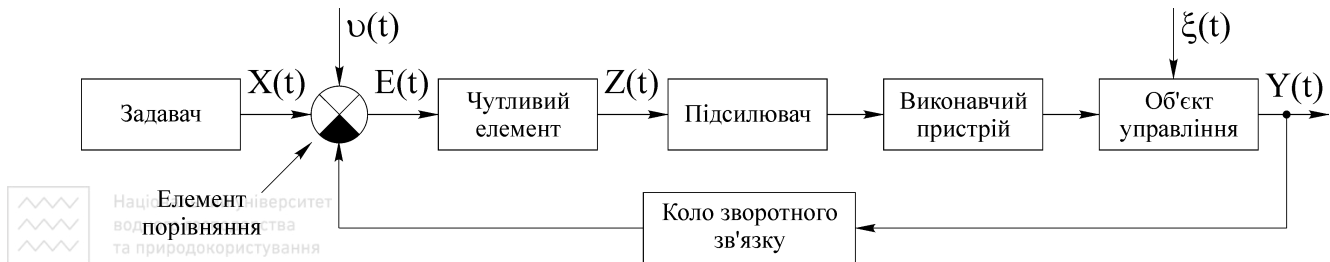


Рисунок 1.2 – Узагальнена функціональна схема систем радіоавтоматики

Крім перерахованих корисних сигналів в більшості систем РА мають місце і збуджувальні дії (сигнали) та завади, які на рис.1.2 позначені як $V(t)$ та $\xi(t)$.

1.4 Основні алгоритми функціонування систем радіоавтоматики

Алгоритм функціонування системи РА визначається або виглядом функціональної залежності $Y(t)$, або виглядом її операторного зображення $Y(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(t)e^{-pt} dt$. В залежності від типу функції $Y(t)$ відрізняють такі основні типи систем РА:

- 1) системи стабілізації або стабілізатори, які реалізують алгоритм $Y(t) = Y_{зад} = \text{const}$, де $Y_{зад}$ – задане значення вихідного сигналу (системи АРП, АПЧ і т. і.) (див. рис.1.3, а);
- 2) програмні регулятори, які реалізують деякий заданий алгоритм роботи (див. рис.1.3, б);
- 3) системи стеження (див. рис.1.3, в), які використовуються тоді, коли довільні зміни вхідного сигналу $X(t)$ заздалегідь невідомі;
- 4) екстремальні системи (див. рис.1.3, г), які визначають мінімальне або максимальне значення вхідного сигналу $X(t)$;
- 5) оптимальні та адаптивні системи, які відносяться до класу кібернетичних систем та мають більш складні алгоритми функціонування, пов'язані,

як правило, з оптимізацією функції $X(t)$ за заданим критерієм оптимальності.

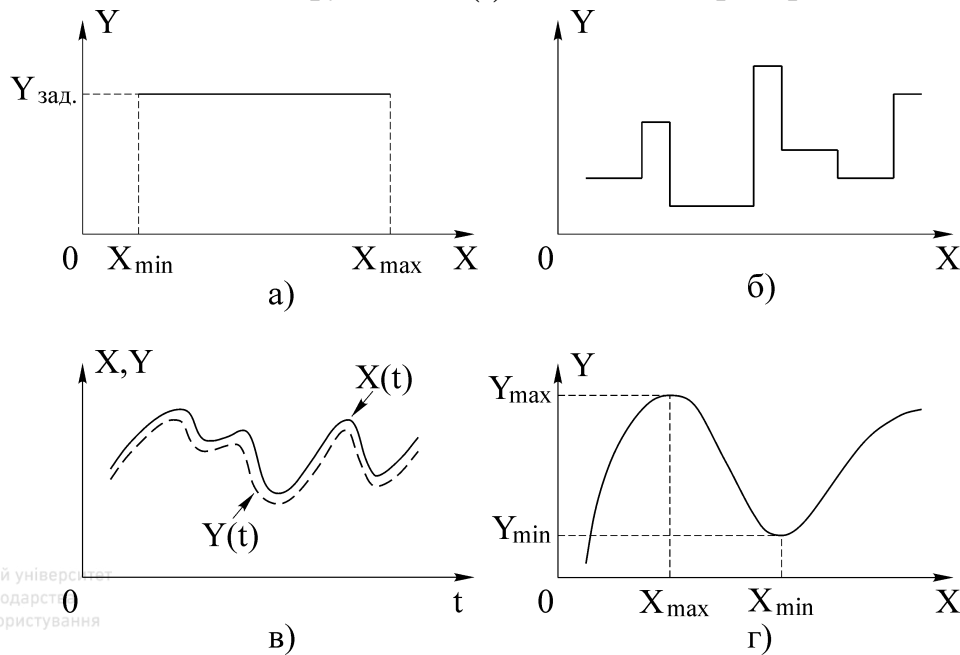


Рисунок 1.3 – До визначення алгоритмів функціонування систем РА

1.5 Основні принципи управління, що лежать в основі систем радіоавтоматики

Основні принципи управління, що лежать в основі РА, відрізняються між собою способом формування сигналу управління $Z(t)$ або його операторного зображення $Z(p)$. Відрізняють чотири основні принципи управління.

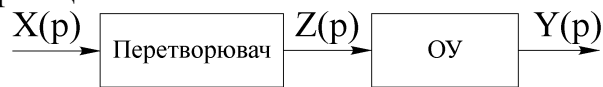
1. Принцип управління за входним сигналом (рис.1.4, а), тобто $Z = f[X(t)]$. При такому принципі управління система РА буде розімкненою. Якщо сигнал управління буде функцією не тільки входного сигналу, але й завади $\xi(t)$, тобто $Z = f[X(t), \xi(t)]$, то необхідно формувати додаткове коло для компенсації завади.

2. Принцип управління за відхиленням (рис.1.4, б), в основі якого лежить функціональна залежність $Z = f[E(t)] = f[X(t) - Y_{33}(t)]$. При 100% – ному зворотному зв'язку функціональну залежність можна представити таким чином: $Z = f[X(t) - Y(t)]$.

3. Комбінований принцип управління (рис.1.4, в), який є комбінацією перших двох принципів управління. При такому принципі управління функціональна залежність буде мати вигляд $Z(E, \vartheta) = Z(E) + Z(\vartheta) = f_1[E(t)] + f_2[\vartheta(t)]$, а вихідний сигнал визначається як $Y(t) = Y_x(t) + \Delta Y_\vartheta(t) = f_3[X(t)] + f_4[\vartheta(t)]$, де $\Delta Y_\vartheta(t)$ – похибка сигналу на виході системи. Такий принцип управління носить назву принципу двоканальності або принципу інваріантності.

Розглянуті принципи управління лежать в основі звичайних систем

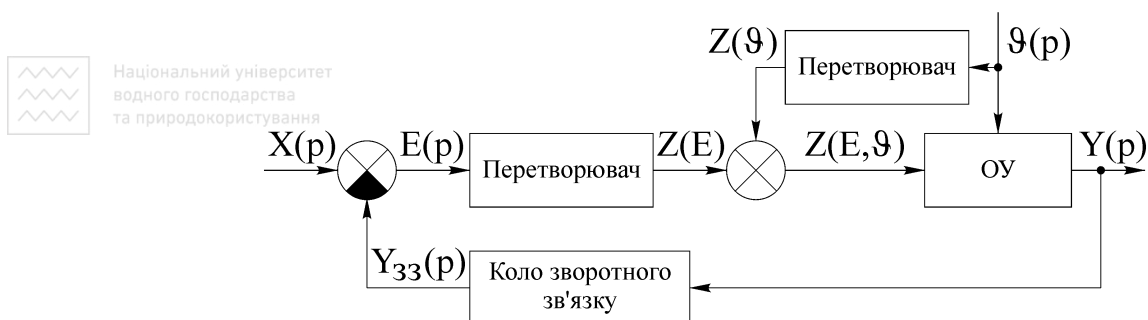
автоматичного управління, для функціонування яких відомі 100% вихідної (попередньої) інформації.



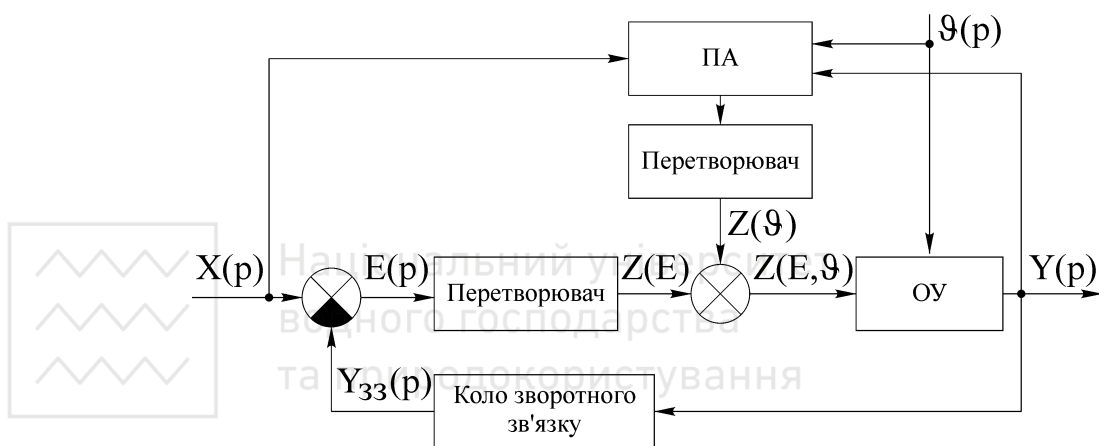
а)



б)



в)



г)

Рисунок 1.4 – До пояснення принципів управління

4. Адаптивний принцип управління (рис.1.4, г), який використовується в системах, в яких відсутня 100%-на вихідна робоча інформація. Найбільш простим прикладом адаптивного принципу управління є системи пошуку екстремумів, які реалізують екстремальний принцип управління. Принцип екстремального управління, як і принцип адаптації в цілому, потребує введення додаткових контурів адаптації, що призводить до підвищення інтелекту системи. Рівень інтелекту контуру адаптації може бути різним.

На рис.1.4 введені такі умовні позначення: ОУ – об'єкт управління;

ПА – пристрій адаптації.

1.6 Класифікація систем радіоавтоматики

Системи РА класифікуються за такими ознаками:

- за алгоритмом функціонування (стабілізаційні, стеження, програмні регулятори і т. і.);
- за принципом управління (розімкнені, замкнені, адаптивні, комбіновані);
- за законом регулювання (регулятори диференціувального, інтегровального та помножувального типів);
- за властивостями кіл (аналогові та дискретні, які в свою чергу діляться на релейні, імпульсні та цифрові);
- за виглядом статичних характеристик (лінійні та нелінійні);
- за властивостями сигналів в системі (детерміновані та статистичні);
- за структурою системи (одноконтурні, двоконтурні і багатоконтурні);
- за кількістю регульованих елементів (одновимірні та багатовимірні);
- за швидкодією (безінерційні та інерційні або електромеханічні);
- за обсягом вихідної робочої інформації (звичайні та адаптивні);
- за організацією циклу регулювання (статичні та астатичні; статичні – в кінці циклу регулювання $E(t) \neq 0$, астатичні – $E(t) = 0$).

Для оцінки будь-якої системи РА необхідно:

- 1) визначити основні (функціонально обов'язкові) та допоміжні кола;
- 2) визначити основні сигнали та дії в досліджуваній системі;
- 3) оцінити систему за наведеними класифікаційними ознаками.

Контрольні запитання

1. В чому полягає алгоритм вивчення системи РА?
2. Що необхідно зробити для оцінки досліджуваної системи РА?
3. Які системи радіоавтоматики відносяться до типових?
4. В чому полягає різниця між екстремальними та оптимальними системами?
5. Назвіть основні складові процесу управління.
6. Нарисуйте узагальнену функціональну схему системи РА та вкажіть на ній функціонально обов'язкові сигнали.
7. Назвіть основні алгоритми функціонування систем РА.
8. В чому полягає різниця між системами стабілізації та системами стеження?
9. Назвіть чотири основних принципи управління, що лежать в основі систем РА?
10. Чим комбінований принцип управління відрізняється від адаптивного?
11. За якими ознаками класифікуються системи РА?

2 МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ОПИСАННЯ ЛІНІЙНИХ НЕПЕРЕРВНИХ СИСТЕМ РАДІОАВТОМАТИКИ

2.1 Загальна характеристика методів

Будь-який пристрій, який аналізується лише з позицій математичної залежності між його вихідним та вхідним сигналами як функціями часу, називається динамічною системою. Таким чином, динамічною є система РА в цілому та кожне її окреме коло.

Задачею математичного дослідження системи РА як динамічної системи є визначення реакції цієї системи $Y(t)$ на задану вхідну дію $X(t)$ або, що є більш простою задачею, знаходження деяких характеристик системи, які визначають її загальні властивості.

Основні методи математичного дослідження систем РА можна розділити на дві групи – часові методи та частотні методи.

Часові методи базуються на використанні диференціального рівняння системи, яке дозволяє визначити передаточну функцію системи та знайти такі важливі характеристики, як перехідна та імпульсна. Імпульсна характеристика системи дозволяє досліджувати процеси в системі за допомогою інтегралу згортки.

Частотні методи засновані на використанні частотних передаточних функцій системи (АЧХ та ФЧХ), а також на її частотних логарифмічних характеристиках (ЛАЧХ та ЛФЧХ).

2.2 Використання диференціальних рівнянь

Диференціальні рівняння широко використовуються при дослідженні процесів в системах РА неперервної дії, особливо в нелінійних системах та в системах зі змінними параметрами. Для лінійних систем з постійними параметрами розроблені більш зручні в практичному відношенні частотні методи.

Розглянемо загальний метод складання диференціального рівняння системи РА. Для кожного функціонального елемента системи у відповідності з його теорією складають диференціальне рівняння, яке зв'язує вихідний сигнал цього елемента з вхідним. В результаті отримують систему рівнянь, кількість яких дорівнює кількості функціональних елементів системи РА. В отриманій системі диференціальних рівнянь сигнали $X(t)$ та $Y(t)$ розглядаються як основні, а всі інші сигнали на вході та виході функціональних елементів системи – як проміжні. Виключивши з отриманої системи рівнянь всі промі-

жні сигнали, отримаємо рівняння, яке зв'язує основні сигнали $X(t)$ та $Y(t)$, тобто диференціальне рівняння системи РА.

Алгоритм виключення проміжних сигналів з системи диференціальних рівнянь є досить трудомістким. Спрощення цього алгоритму для лінійних систем досягається за рахунок використання передаточних функцій.

Розглянемо лінійну динамічну систему РА, яка має диференціальне рівняння

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k Y(t)}{dt^k} = \sum_{i=0}^M b_i \frac{d^i X(t)}{dt^i}, \quad (2.1)$$

де M та N – цілі числа, при цьому $M \leq N$.

Введемо оператор диференціювання $p = \frac{d}{dt}$ і перепишемо співвідно-

шення (2.1) у вигляді

$$\sum_{k=0}^N a_k p^k Y(p) = \sum_{i=0}^M b_i p^i X(p), \quad (2.2)$$

де $Y(p) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(t) e^{-pt} dt$ та $X(p) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-pt} dt$ – операторні зображення вихідного та вхідного сигналів системи відповідно.

Розділивши обидві частини рівняння (2.2) на диференціальний поліном лівої частини $D_N(p) = \sum_{k=0}^N a_k p^k$, отримаємо

$$Y(p) = \frac{R_M(p)}{D_N(p)} X(p) = K(p) X(p), \quad (2.3)$$

де $K(p)$ – передаточна функція системи, яка відповідає диференціальному рівнянню (2.1); $R_M(p) = \sum_{i=0}^M b_i p^i$ – диференціальний поліном правої частини рівняння (2.2).

Таким чином, співвідношення (2.3) – це скорочена операторна форма запису диференціального рівняння системи (2.1).

Як відомо, загальне рішення $Y(t)$ диференціального рівняння (2.1) – це сума загального рішення $Y_B(t)$ однорідного рівняння

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k Y_B(t)}{dt^k} = 0,$$

отриманого з співвідношення (2.1), та частинного рішення $Y_{\Pi}(t)$ неоднорідного рівняння (2.1), тобто

$$Y(t) = Y_B(t) + Y_{\Pi}(t). \quad (2.4)$$

Загальне розв'язання однорідного рівняння $Y_B(t)$ визначає вільну складову вихідного сигналу системи РА, обумовлену початковим розузгодженням системи при відсутності зовнішньої дії. Частинне розв'язання $Y_{\Pi}(t)$ неоднорідного рівняння визначає примусову складову вихідного сигналу системи РА, тобто реакцію системи на зовнішню дію при відсутності початкового розузгодження.

Загальне розв'язання однорідного рівняння при некратних коренях характеристичного рівняння $\sum_{k=0}^N a_k p^k = 0$ має вигляд

$$Y_B(t) = \sum_{i=1}^N C_i e^{\lambda_i t}, \quad (2.5)$$

де λ_i ($i = \overline{1, N}$) – корені характеристичного рівняння системи; C_i – сталі коефіцієнти, які визначаються початковими умовами.

Початковими умовами називають значення функції $Y(t)$ та $N-1$ її перших похідних в момент часу $t=0$, тобто N значень $Y(0)$, $Y'(0)$, ..., $Y^{(N-1)}(0)$, серед яких хоча б одне повинно відрізнятися від нуля. В іншому випадку всі $C_i = 0$ та вільне розв'язання відсутнє. Це означає, що до моменту часу $t=0$ система знаходиться у стані спокою.

Таким чином, загальне розв'язання однорідного рівняння $Y_B(t)$ шукають при нульових початкових умовах. Це розв'язання характеризує процеси в системі при відсутності зовнішньої дії та визначається початковими умовами. Вільна складова вихідного сигналу системи РА, що працює в нормальному режимі, при збільшенні часу загасає, тобто $Y_B(t \rightarrow \infty) \rightarrow 0$.

Частинне розв'язання неоднорідного рівняння $Y_{\Pi}(t)$ шукають при нульових початкових умовах у відповідності з методикою, яка викладена в підручниках по диференціальних рівняннях. Воно однозначно визначається для кожного диференціального рівняння зовнішньою дією $X(t)$ та характеризує реакцію системи РА на цю дію.

Примусову або усталену складову вихідного сигналу системи з деякою точністю відтворює вхідний сигнал, тобто

$$Y_{\Pi}(t) = X(t) + E(t), \quad (2.6)$$

де $E(t)$ – усталена помилка системи РА.

Системи, примусова складова вихідного сигналу яких протягом часу загасає, називають стійкими. Стійкість – найважливіша властивість системи РА, яка повинна бути забезпечена в процесі проектування та налаштування системи. Нестійкі системи не можуть виконувати своїх функцій.

Як виходить з рівняння (2.5), система буде стійкою тільки тоді, коли всі дійсні корені характеристичного рівняння цієї системи від'ємні, а всі комплексно-спряжені корені цього рівняння мають від'ємні дійсні частини, тобто кожному від'ємному дійсному кореню відповідає складова вигляду $Se^{-\alpha t}$, де $\alpha > 0$, а кожній парі комплексно-спряжених коренів з від'ємною дійсною частиною – складова вигляду $Se^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi)$, де $\beta > 0$. Кожна з цих складових прямує до нуля при $t \rightarrow \infty$ та, відповідно, $Y_B(t)|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow 0$, тобто система буде стійкою.

Таким чином, однорідне диференціальне рівняння системи РА дає можливість досліджувати найважливішу властивість системи – її стійкість.

2.3 Використання передаточних функцій



Національний університет
водного господарства
та природокористування

Будемо вважати, що лінійна динамічна система РА описується диференціальним рівнянням вигляду (2.1). Використовуючи пряме перетворення Лапласа до лівої та правої частин цього рівняння та враховуючи властивість лінійності цього перетворення, отримаємо

$$\sum_{k=0}^N a_k p^k Y(p) = \sum_{i=0}^M a_i p^i X(p),$$

звідки

$$Y(p) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i p^i}{\sum_{k=0}^N a_k p^k} X(p) = \frac{R_M(p)}{D_N(p)} X(p) = K(p) X(p), \quad (2.7)$$



де

Національний університет

водного господарства

та природокористування

$$K(p) = \frac{R_M(p)}{D_N(p)} = \frac{\sum_{i=0}^M b_i p^i}{\sum_{k=0}^N a_k p^k} = \frac{Y(p)}{X(p)} \quad (2.8)$$

– передаточна функція динамічної системи РА. Вона визначає відношення зображення за Лапласом відгуку системи до зображення за Лапласом вхідної дії. Як видно з співвідношення (2.8), передаточна функція лінійної динамічної системи РА є дрібно-раціональною функцією змінної p .

Формально передаточна функція динамічної системи РА при заданому диференціальному рівнянні цієї системи визначається досить нескладно. Для цього достатньо записати рівняння (2.1) в операторній формі (2.2), а потім, розглядаючи символ p як змінну перетворення Лапласа, замінити в співвідношенні (2.1) часові функції $X(t)$ та $Y(t)$ їх операторними зображеннями

$X(p)$ та $Y(p)$, тобто перейти до запису $Y(p) = K(p)X(p)$.

Таким чином, передаточна функція динамічної системи РА визначає в області зображень реакцію цієї системи на задану вхідну дію.

Після того, як у відповідності з (2.7) при заданій функції $X(p)$ знайдемо зображення $Y(p)$ відгуку системи, часову функцію $Y(t)$ визначають за допомогою зворотного перетворення Лапласа, тобто

$$Y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} Y(p) e^{pt} dp.$$

На практиці зворотне перетворення Лапласа можна обчислити за допомогою лишків, тобто розкладання функції $Y(p)$ на елементарні дробі з наступним використанням таблиць перетворень Лапласа.



Національне
водного
та природокористування

Приклад 2.1. Визначити сигнал на виході системи, яка описується диференціальним рівнянням виду $\tau \frac{dY(t)}{dt} + Y(t) = K X(t)$, якщо вхідний сигнал дорівнює $X(t) = X_m \sin \omega t$.

За допомогою співвідношень (2.7) та (2.8) знайдемо передаточну функцію системи:

$$K(p) = \frac{K}{1 + p\tau}.$$

За таблицями зображень Лапласу

$$X(p) = \int_{-\infty}^{\infty} X_m \sin \omega t \cdot e^{-pt} dt = \frac{X_m \omega}{p^2 + \omega^2}.$$

Тоді

$$Y(p) = K(p)X(p) = \frac{KX_m \omega}{(p^2 + \omega^2)(1 + p\tau)}.$$

Розкладемо функцію $Y(p)$ на елементарні дробі:

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{KX_m \omega}{(p^2 + \omega^2)(1 + p\tau)} = \frac{A}{1 + p\tau} + \frac{Bp}{p^2 + \omega^2} + \frac{C}{p^2 + \omega^2} = \\ &= \frac{(A + B\tau)p^2 + (B + C\tau)p + A\omega^2 + C}{(p^2 + \omega^2)(1 + p\tau)}. \end{aligned}$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових ступенях p в чисельнику лівої та правої частин останнього рівняння, отримаємо систему алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів:

$$\begin{cases} A + B\tau = 0; \\ B + C\tau = 0; \\ A\omega^2 + C = KX_m \omega. \end{cases}$$

Вирішивши останнє рівняння, знаходимо:

$$A = \frac{KX_m \omega \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2}; \quad B = -\frac{KX_m \omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2}; \quad C = \frac{KX_m \omega}{1 + \omega^2 \tau^2}.$$

Скориставшись таблицями перетворень Лапласу, знаходимо:

$$L^{-1} \left[\frac{A}{1 + p\tau} \right] = \frac{A}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{KX_m \omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} e^{-\frac{t}{\tau}};$$

$$L^{-1} \left[\frac{Bp}{p^2 + \omega^2} \right] = B \cos \omega t = -\frac{KX_m \omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} \cos \omega t;$$

$$L^{-1} \left[\frac{C}{p^2 + \omega^2} \right] = \frac{C}{\omega} \sin \omega t = \frac{KX_m}{1 + \omega^2 \tau^2} \sin \omega t,$$

де L^{-1} - оператор зворотного перетворення Лапласу.

Тоді сигнал на виході системи буде визначатися таким співвідношенням:

$$Y(t) = L^{-1}[Y(p)] = \frac{KX_m \omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{KX_m}{1 + \omega^2 \tau^2} (\sin \omega t - \omega \tau \cos \omega t) = \frac{KX_m}{1 + \omega^2 \tau^2} \times \\ \times \left\{ \omega \tau e^{-\frac{t}{\tau}} + \sin \omega t - \omega \tau \cos \omega t \right\} = \frac{KX_m}{1 + \omega^2 \tau^2} \left\{ \omega \tau e^{-\frac{t}{\tau}} + \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2} \sin(\omega t - \arctg \omega \tau) \right\}.$$

2.4 Використання перехідної та імпульсної характеристик

Перехідна характеристика використовується для оцінки якості роботи системи РА в перехідному режимі. Ця характеристика є відгуком лінійної динамічної системи на одиничну ступінчасту функцію (функцію Хевісайда)

$$l(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < 0; \\ 1, & \text{при } t \geq 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

При заданому диференціальному рівнянні лінійної динамічної системи її перехідну характеристику найбільш зручно визначати таким чином. Записавши диференціальне рівняння в символічній формі та позначивши перехідну характеристику як $h(p)$, отримаємо

$$h(p) = K(p)l(p) = \frac{K(p)}{p}, \quad (2.10)$$

де $l(p) = \int_{-\infty}^{\infty} l(t) e^{-pt} dt = \frac{1}{p}$ – операторне зображення функції Хевісайда.

Перейшовши до часової області, отримаємо

$$h(t) = L^{-1} \left[\frac{K(p)}{p} \right] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{K(p)}{p} e^{pt} dp. \quad (2.11)$$

Необхідно визначити, що перехідна характеристика як реакція на дію, що відрізняється від нуля лише при $t \geq 0$, дорівнює нулю при $t < 0$, тобто $h(t) = 0$ при $t < 0$. Типові перехідні характеристики систем РА наведені на рис.2.1, при цьому криві на рис.2.1, а, б відповідають стійкій системі, а криві на рис.2.1, в, г – нестійкій.

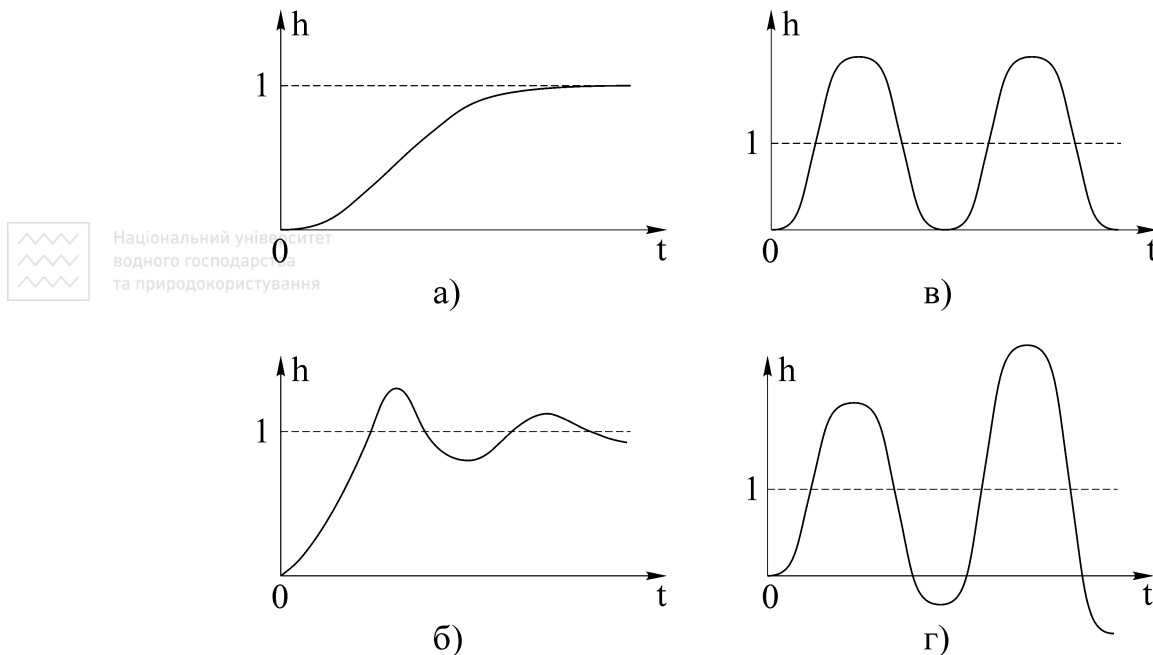


Рисунок 2.1 – Перехідні характеристики систем радіоавтоматики

Приклад 2.2. Визначити перехідну характеристику системи, яка описується диференціальним рівнянням $\tau \frac{dY(t)}{dt} + Y(t) = K X(t)$.

Передаточна функція такої системи буде мати вигляд $K(p) = \frac{K}{1 + p\tau}$, а операторне зображення перехідної характеристики визначається як

$$h(p) = K(p)l(p) = \frac{K(p)}{p} = \frac{K}{p(1 + p\tau)} = K \left(\frac{1}{p} - \frac{\tau}{1 + p\tau} \right).$$

З останнього співвідношення знаходимо

$$h(t) = L^{-1}[h(p)] = K \left\{ L^{-1} \left[\frac{1}{p} \right] - L^{-1} \left[\frac{\tau}{1 + p\tau} \right] \right\} = K \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right).$$

Імпульсною характеристикою лінійної системи називають відгук цієї системи на одиничну дельта-функцію (функцію Дірака), яка може бути визначена як похідна одиничної функції (функції включення):

$$\delta(t) = \frac{dl(t)}{dt} = \begin{cases} 0, & \text{при } t \neq 0; \\ \infty, & \text{при } t = 0, \end{cases} \quad (2.12)$$

при цьому $\int_{-\infty}^t \delta(t_1) dt_1 = l(t)$ та $\int_{\beta}^{\alpha} \delta(t) dt = 1$ для будь-яких $\alpha > 0$ та $\beta > 0$. Таку функцію іноді називають ваговою функцією.

Дельта-функція має властивість фільтрування, що спрощує обчислення визначених інтегралів, до підінтегрального виразу яких ця функція входить як співмножник

$$\int_{t_1-a}^{t_1+b} f(t) \delta(t_1 - t) dt = f(t_1) \quad (2.13)$$

при будь-яких $a > 0$ та $b \leq +\infty$ для будь-якої обмеженої функції $f(t)$. Крім того, для будь-якої обмеженої функції $f(t)$ виконується рівність $f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$, якщо $f(0) \neq 0$, та $f(t)\delta(t) = 0$, якщо $f(0) = 0$.

Використовуючи співвідношення (2.8), операторне зображення імпульсної характеристики можна записати таким чином:

$$g(p) = K(p)\delta(p) = K(p)p l(p) = K(p)p \frac{1}{p} = K(p), \quad (2.14)$$

де $\delta(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-pt} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dh(t)}{dt} e^{-pt} dt = 1$ – операторне зображення дельта-функції.

Для переходу в часову область необхідно використовувати зворотне перетворення Лапласа:

$$g(t) = L^{-1}[g(p)] = L^{-1}[K(p)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} K(p) e^{pt} dp. \quad (2.15)$$

З співвідношень (2.14) та (2.15) можна зробити висновок, що між перехідною та імпульсною характеристиками існує взаємно однозначний зв'язок

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt}. \quad (2.16)$$

Оскільки імпульсна характеристика є реакцією динамічної системи на збудження, прикладене до її входу в момент часу $t = 0$ та відсутнє при $t < 0$, а будь-яка реальна система не може реагувати на вхідну дію до того, як вона потрапила на її вхід, то для будь-якої реальної динамічної системи $g(t) = 0$ при $t < 0$. Вимогу

$$g(t) = 0 \text{ при } t < 0 \quad (2.17)$$

називають умовою фізичної реалізованості системи. Тому в будь-якому окремому випадку, коли імпульсною характеристикою системи є деяка кон-

кретна функція $f(t)$, що визначена для всіх t в інтервалі $-\infty \leq t \leq +\infty$ та не дорівнює нулю при $t < 0$, імпульсна характеристика визначається як

$$g(t) = \begin{cases} f(t), & \text{при } t \geq 0; \\ 0, & \text{при } t < 0, \end{cases} \quad (2.18)$$

або

$$g(t) = f(t)l(t). \quad (2.19)$$

Таким чином, на імпульсну характеристику фізично реалізованої динамічної системи примусово накладається обмеження (2.17).

Приклад 2.3. Визначити імпульсну характеристику системи, яка описується диференціальним рівнянням $\tau \frac{dY(t)}{dt} + Y(t) = K X(t)$.

Передаточна функція такої системи буде мати вигляд $K(p) = \frac{K}{1 + p\tau}$, а операторне зображення імпульсної характеристики визначається як

$$g(p) = K(p)\delta(p) = K(p) = \frac{K}{1 + p\tau}.$$

З останнього співвідношення знаходимо

$$g(t) = L^{-1}[g(p)] = K L^{-1}\left[\frac{1}{1 + p\tau}\right] = \frac{K}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

З іншого боку (див. приклад 2.2)

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt} = K \frac{d}{dt} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) = \frac{K}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

За умови фізичної реалізованості системи останнє співвідношення можна переписати таким чином:

$$g(t) = \frac{K}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot l(t) = \begin{cases} \frac{K}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}, & \text{при } t \geq 0; \\ 0, & \text{при } t < 0, \end{cases}$$

тому що математично $g(t) = \frac{K}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \neq 0$ при $t < 0$.

2.5 Використання інтегралу згортки

Якщо відома імпульсна характеристика динамічної системи $g(t)$, то процес на виході цієї системи при довільному вхідному сигналі $X(t)$ визначається інтегралом Дюамеля або інтегралом згортки

$$Y(t) = \int_0^t g(t - \tau) X(\tau) d\tau, \quad (2.20)$$

де τ – змінна інтегрування.

Враховуючи, що $g(t - \tau) = 0$ при $\tau > t$, іноді співвідношення (2.20) записують у вигляді

$$Y(t) = \int_0^{\infty} g(t - \tau)X(\tau)d\tau. \quad (2.21)$$

Відзначимо, що така форма запису інтеграла згортки для реальних систем є формальною, тому що для $\tau > t$ у відповідності з (2.17) підінтегральне співвідношення в (2.21) слід покласти рівним нулю, тобто інтегрування виконувати в межах $0 \leq \tau \leq t$.

Процес на виході системи, що визначається співвідношенням (2.20), складається з перехідної та усталеної складових.

Усталена складова може бути виділена з співвідношення (2.20), якщо нижню межу інтегрування покласти рівною $-\infty$. В цьому випадку від моменту $\tau = -\infty$ прикладання зовнішньої дії $X(\tau)$ до входу системи до моменту часу $\tau = t$ процес в системі буде тривати нескінченно довго та перехідна складова повністю загасає. Тоді

$$Y_y(t) = \int_{-\infty}^t g(t - \tau)X(\tau)d\tau. \quad (2.22)$$

Співвідношення (2.22) часто записують у дещо іншому вигляді. Проведемо заміну змінних, поклавши $\tau_1 = t - \tau$. Тоді $\tau = t - \tau_1$, $d\tau = -d\tau_1$, $\tau_1 = 0$ при $t = \tau$; $\tau_1 \rightarrow +\infty$ при $\tau \rightarrow -\infty$. Враховуючи, що при взаємній заміні верхньої та нижньої меж інтегрування знак інтегралу змінюється, з (2.22) отримаємо

$$Y_y(t) = \int_0^{\infty} g(\tau_1)X(t - \tau_1)d\tau_1. \quad (2.23)$$

В останньому співвідношенні, на відміну від (2.21), інтегрування виконують в межах $0 \leq \tau_1 \leq +\infty$. Цьому випадку відповідає зміна змінної τ в співвідношенні (2.22) в межах $(-\infty; t)$.

2.6 Використання частотних передаточних функцій

Частотні методи дослідження систем РА засновані на розгляді усталеної реакції системи на гармонічну вхідну дію.

Частотні передаточні функції використовуються в задачах аналізу систем РА. Для вирішення задач синтезу більш зручним є метод логарифмічних частотних характеристик.

Будемо вважати, що диференціальне рівняння динамічної системи РА задане співвідношенням (2.1). Розглянемо усталену реакцію цієї системи на гармонічний вхідний сигнал, який запишемо в комплексній формі:

$$X(t) = X_m e^{j(\omega t + \varphi_1)} = \dot{X}_m e^{j\omega t}, \quad (2.24)$$

де X_m – амплітуда гармонічного коливання; ω та φ_1 – частота та початкова фаза коливання; $\dot{X}_m = X_m e^{j\varphi_1}$ – комплексна амплітуда коливання.


Частинне розв'язання неоднорідного диференціального рівняння (2.1) будемо шукати при нульових початкових умовах у вигляді

$$Y(t) = Y_m e^{j(\omega t + \varphi_2)} = \dot{Y}_m e^{j\omega t}. \quad (2.25)$$

Підставивши співвідношення (2.24) та (2.25) в (2.1) і враховуючи, що $\frac{d^k}{dt^k} e^{j\omega t} = (j\omega)^k e^{j\omega t}$, отримаємо

$$\dot{Y}_m = K(j\omega) \dot{X}_m,$$

де




$$K(j\omega) = \frac{b_M(j\omega)^M + \dots + b_i(j\omega)^i + \dots + b_1 j\omega + b_0}{a_N(j\omega)^N + \dots + a_k(j\omega)^k + \dots + a_1 j\omega + a_0} = \frac{\sum_{i=0}^M b_i(j\omega)^i}{\sum_{k=0}^N a_k(j\omega)^k} = \frac{R_M(j\omega)}{D_N(j\omega)} \quad (2.26)$$

– частотна передаточна функція динамічної системи, яка описується диференціальним рівнянням (2.1).

Як видно з співвідношення (2.26), частотна передаточна функція є дрібно – раціональною функцією змінної $j\omega$.

Порівнявши співвідношення (2.26) та (2.8), можна зробити висновок, що частотна передаточна функція може бути формально отримана з передаточної функції шляхом підстановки $p = j\omega$.

Частотна передаточна функція є комплексною функцією змінної ω , тому як будь-яка комплексна функція може бути записана в вигляді



$$K(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) = |K(j\omega)| e^{j\arg\{K(j\omega)\}} = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}, \quad (2.27)$$

де $U(\omega) = \operatorname{Re}\{K(j\omega)\}$ та $V(\omega) = \operatorname{Im}\{K(j\omega)\}$ – дійсна та уявна частини функції $K(j\omega)$; $A(\omega) = |K(j\omega)|$ – модуль функції $K(j\omega)$; $\varphi(\omega) = \arg\{K(j\omega)\}$ – аргумент функції $K(j\omega)$.

Модуль частотної передаточної функції динамічної системи визначає амплітудно-частотну характеристику (АЧХ) цієї системи, а аргумент – фазо-частотну характеристику (ФЧХ).

Частотна передаточна функція є векторною функцією та на комплексній площині графічно зображується у вигляді вектора з прямокутними координатами $U(\omega)$ та $V(\omega)$ або з полярними координатами $A(\omega)$ та $\varphi(\omega)$, як показано на рис.2.2. При зміні змінної ω в межах $(-\infty; +\infty)$ кінець вектора описує криву, яка носить назву амплітудно-фазової характеристики (АФХ) системи або годографа.

З рис.2.2 може бути знайдений зв'язок між дійсною та уявною частинами функції $K(j\omega)$, а також її модулем та аргументом:

$$\begin{cases} A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}; \\ \varphi(\omega) = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)}; \\ U(\omega) = A(\omega) \cos \varphi(\omega); \\ V(\omega) = A(\omega) \sin \varphi(\omega). \end{cases} \quad (2.28)$$

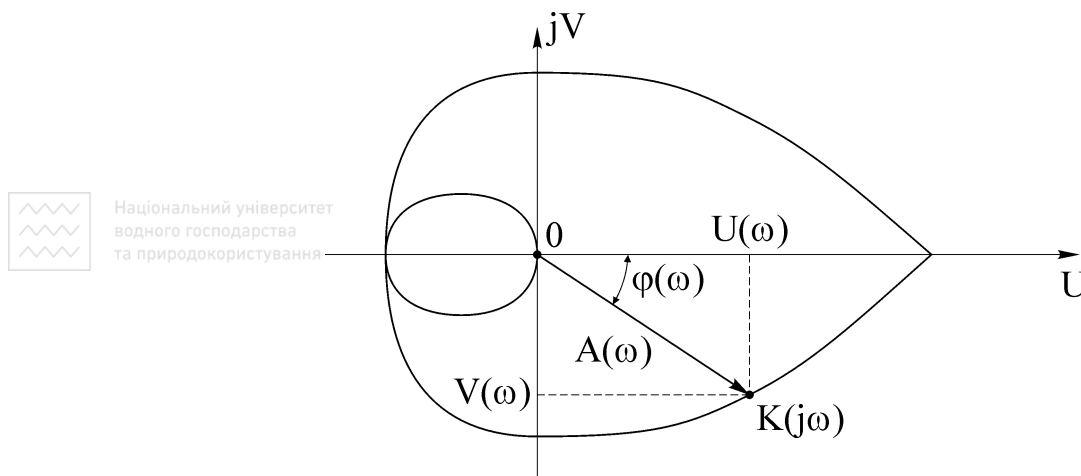


Рисунок 2.2 – Годогрaф динaмiчної системи рaдіoаvтомaтики

Дійсна частина функції $K(j\omega)$ є парною функцією змінної ω , а уявна частина – непарною функцією. Дійсно, запишемо співвідношення (2.26) у вигляді

$$K(j\omega) = \frac{R_M(j\omega) \cdot D_N(-j\omega)}{D_N(j\omega) \cdot D_N(-j\omega)} = \frac{R_M(j\omega) \cdot D_N(-j\omega)}{|D_N(j\omega)|^2} = U(\omega) + jV(\omega).$$

Знаменник останнього співвідношення, спільний для $U(\omega)$ та $V(\omega)$, являє собою квадрат модуля функції $D_N(j\omega)$ та містить лише парні ступені ω . Таким чином, дійсна та уявна частини передаточної функції $K(j\omega)$ виділяються в чисельнику. Але при множенні поліномів $R_M(j\omega)$ та $D_N(-j\omega)$ дійсна частина добутку містить лише парні ступені ω , а уявна частина – лише непарні. Таким чином чисельник та знаменник функції $U(\omega)$ містить лише парні ступені функції ω і тоді $U(-\omega) = U(\omega)$, в той час як чисельник функції $V(\omega)$ містить лише непарні ступені ω , а знаменник – парні, і тоді $V(-\omega) = -V(\omega)$. Звідси також виходить, що модуль $A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$ є парною функцією, тобто $A(-\omega) = A(\omega)$, а аргумент $\varphi(\omega) = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)}$ є непарною функцією, тобто $\varphi(-\omega) = -\varphi(\omega)$. Тому АФХ динамічної системи являє

собою криву, симетричну відносно осі абсцис, тому що кожній точці АФХ з координатами $[U(\omega); V(\omega)]$ або $[A(\omega); \varphi(\omega)]$ відповідає її дзеркальне відбиття відносно осі абсцис з координатами $[U(-\omega); V(-\omega)] = [U(\omega); V(-\omega)]$ або $[A(-\omega); \varphi(-\omega)] = [A(\omega); \varphi(-\omega)]$. Відповідно АЧХ системи симетрична відносно осі координат, а ФЧХ симетрична відносно початку координат.

Запишемо співвідношення (2.25) з врахуванням (2.27) у вигляді

$$Y_m e^{j\varphi_2} = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)} X_m e^{j\varphi_1}$$

або

$$\frac{Y_m}{X_m} e^{j(\varphi_2 - \varphi_1)} = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)},$$

звідки знаходимо

$$\frac{Y_m}{X_m} = A(\omega); \quad \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \varphi(\omega).$$



Національний університет
водного господарства
та природокористування

З останнього співвідношення видно, що амплітуда вихідних коливань системи Y_m при незмінній амплітуді вхідних залежить від частоти цих коливань. Відношення амплітуди вихідних коливань до амплітуди вхідних, як функція частоти, визначається модулем частотної передаточної функції системи $A(\omega)$. Фазовий зсув $\Delta\varphi$ між вихідними та вхідними коливаннями також залежить від частоти цих коливань та, як функція частоти, визначається аргументом частотної передаточної функції системи $\varphi(\omega)$.

Таким чином, частотна передаточна функція динамічної системи повністю визначає процес проходження гармонічного коливання через цю систему.

У випадку довільного (не гармонічного) вхідного сигналу $X(t)$ частотна передаточна функція системи дорівнює відношенню зображень за Фур'є вихідного та вхідного сигналів цієї системи. Результат перетворення буде визначати комплексні спектри цих сигналів. Якщо позначити через $X(j\omega)$ та $Y(j\omega)$ відповідно спектри функцій $X(t)$ та $Y(t)$, то

$$X(j\omega) = F[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-j\omega t} dt;$$

$$Y(j\omega) = F[Y(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} Y(t) e^{-j\omega t} dt,$$

де F – оператор перетворення Фур'є.

В цьому випадку покладають, що функції $X(t)$ та $Y(t)$ абсолютно інтегровані, тобто інтеграли $\int_{-\infty}^{\infty} |X(t)| dt$ і $\int_{-\infty}^{\infty} |Y(t)| dt$ існують і мають кінцеве значення.

Враховуючи, що для будь-якої абсолютно інтегрованої функції $X(t)$ виконується співвідношення

$$F[X^{(k)}(t)] = (j\omega)^k F[X(t)],$$

та провівши перетворення Фур'є для рівняння (2.1), отримаємо

$$\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k Y(j\omega) = \sum_{i=0}^M b_i (j\omega)^i X(j\omega),$$

звідки

$$Y(j\omega) = K(j\omega)X(j\omega), \quad (2.30)$$

де $K(j\omega)$ за формою збігається з співвідношенням (2.26). Відзначимо, що формально останнє співвідношення можна отримати з (2.8) підстановкою $p = j\omega$.

Приклад 2.4. Знайти вихідний сигнал системи за умовами прикладу 2.1, використовуючи частотну передаточну функцію.

За допомогою підстановки $p = j\omega$ знаходимо

$$K(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega\tau} = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} e^{-j\arctg\omega\tau}.$$

Тоді для вхідного сигналу $X(t) = X_m \sin \omega t$ отримаємо

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}, \quad \varphi(\omega) = -\arctg\omega\tau,$$

звідки

$$Y(t) = X_m A(\omega) \sin[\omega t + \varphi(\omega)] = \frac{KX_m}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \sin(\omega t - \arctg\omega\tau).$$

Таким чином, усталений процес на виході лінійної системи при гармонічному вхідному сигналі найпростіше визначити при використанні її частотної передаточної функції.

2.7 Використання логарифмічних частотних характеристик

Метод побудови логарифмічних частотних характеристик полягає в тому, що АЧХ та ФЧХ досліджуваної динамічної системи графічно будують у вигляді неперервних кривих, при цьому ці криві будують в логарифмічному масштабі. Тому такі характеристики носять назву логарифмічної амплітудно-частотної характеристики (ЛАЧХ) та логарифмічної фазочастотної характеристики (ЛФЧХ). Крім того, ЛАЧХ наближено будують у вигляді окремих прямолінійних відрізків, які називають асимптотами ЛАЧХ, що суттєво спрощує побудову цієї характеристики. Тому ЛАЧХ називають асимптотичною.

Для широкого та важливого класу систем при використанні методу логарифмічних частотних характеристик можливим є обмежитись побудовою ЛАЧХ без побудови ЛФЧХ, тому що для систем цього класу між АЧХ та ФЧХ існує однозначний зв'язок, завдяки якому АЧХ системи містить вичерпну інформацію про властивості такої системи. Це відноситься до так званих мінімально-фазових кіл та систем. Мінімально-фазовою називають таку динамічну систему, для якої корені характеристичних рівнянь, що відповідають чисельнику та знаменнику передаточної функції системи, мають від'ємні дійсні частини.

Завдяки простоті побудови логарифмічних частотних характеристик їх використання є ефективним при вирішенні багатьох практичних задач. В наш час метод логарифмічних частотних характеристик розроблений та відноситься до основних методів аналізу та синтезу лінійних систем РА як неперервної, так і дискретної дії.

Будемо вважати, що $K(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$ – частотна передаточна функція досліджуваної динамічної системи. Співвідношення для ЛАЧХ $L(\omega)$, вираженої в дБ, записується у вигляді

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega). \quad (2.31)$$

При побудові цієї кривої частоту ω відкладають по осі абсцис в логарифмічному масштабі. Значення функції $L(\omega)$ відкладають по осі ординат в децибелах в лінійному масштабі.

Логарифмічну фазочастотну характеристику будують у відповідності з співвідношенням (2.28). При цьому ω відкладають по осі абсцис в логарифмічному масштабі, а значення фази $\varphi(\omega)$ – по осі ординат в градусах в лінійному масштабі.

Спосіб побудови асимптотичної ЛАЧХ розглянемо на конкретному прикладі. Будемо вважати, що передаточна функція системи РА має вигляд

$$K(p) = \frac{K_1(1 + p\tau_2)}{p(1 + p\tau_1)(1 + p\tau_3)}. \quad (2.32)$$

Нумерацію сталих часу τ_i в співвідношенні для передаточної функції завжди проводять в порядку зменшення їх чисельних значень, тобто $\tau_1 \geq \tau_2 \geq \tau_3 \dots$. У співвідношенні (2.32) прийемо $\tau_1 \geq \tau_2 \geq \tau_3$, тоді

$$K(j\omega) = \frac{K_1 \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_2} \right)}{j\omega \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_1} \right) \left(1 + \frac{\omega}{\omega_3} \right)},$$

де $\omega_k = \frac{1}{\tau_k}$; $k = 1, 2, 3$, при цьому $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$.

Величини ω_k , обернено пропорційні сталим часу динамічної системи РА, називають частотами спрягнення цієї системи.

Коефіцієнт передачі системи K_1 в даному випадку має розмірність кругової частоти рад/с або просто с^{-1} . Таким чином, частотна передаточна функція $K(j\omega)$ є безрозмірною функцією частоти ω .

У відповідності з співвідношенням (2.27) маємо:

$$A(\omega) = \frac{K_1 \sqrt{1 + \omega^2 \tau_2^2}}{\omega \sqrt{1 + \omega^2 \tau_1^2} \sqrt{1 + \omega^2 \tau_3^2}} = \frac{K_1 \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}}{\omega \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2} \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_3}\right)^2}}; \quad (2.33)$$

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} + \arctg \frac{\omega}{\omega_1} + \arctg \frac{\omega}{\omega_2} + \arctg \frac{\omega}{\omega_3}. \quad (2.34)$$

Прологарифмувавши співвідношення (2.33), отримаємо:

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg \frac{K_1}{\omega} - 20 \lg \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2} + 20 \lg \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2} - 20 \lg \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_3}\right)^2}. \quad (2.35)$$

При побудові асимптотичної ЛАЧХ користуються таким правилом. В співвідношенні $\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)^2}$ для всіх значень $\omega \leq \omega_k$ нехтують другою скла-

довою в порівнянні з одиницею, а для значень $\omega > \omega_k$ нехтують одиницею в порівнянні з другою складовою. Помилка, що виникає при цьому, не перевищує декількох децибел.

Якщо в співвідношенні частотної передаточної функції є m частот спрягнення, то асимптотична ЛАЧХ складається з $m+1$ асимптот. Кожну k -ту асимптоту будують в діапазоні частот $\omega_{k-1} \leq \omega \leq \omega_k$. При цьому першу асимптоту будують для $0 \leq \omega \leq \omega_1$, а останню – для $\omega > \omega_m$. В розглянутому прикладі $m = 3$, тому ЛАЧХ складається з чотирьох асимптот.

Перша асимптота відповідає зміні частоти в межах $0 < \omega \leq \omega_1$. У відповідності з правилом побудови ЛАЧХ для першої асимптоти з (2.35) маємо

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{K_1}{\omega} = -20 \lg \frac{\omega}{K_1}, \quad \omega \leq \omega_1. \quad (2.36)$$

Для зручності побудови першої асимптоти формально будемо розглядати співвідношення (2.36) при зміні частоти в межах $0 < \omega < \infty$. Оскільки при побудові ЛАЧХ змінну ω відкладають по осі частот в логарифмічному масштабі, то (2.36) є рівнянням прямої, яка проходить через точку з координатами $(\omega = K_1; L = 0)$ та має нахил -20 дБ/дек (децибел на декаду), тому що при зміні ω на одну декаду, тобто у 10 разів, $L(\omega)$ змінюється на 20 дБ та, як виходить з співвідношення (2.36), із збільшенням ω функція $L(\omega)$ зменшує свої значення.

На рис.2.3 ця пряма позначена суцільною лінією для $\omega < \omega_1$ та пунктирною для $\omega > \omega_1$. Суцільна лінія є першою асимптотою ЛАЧХ досліджуваної системи. Кінець цієї асимптоти, як видно з (2.36), знаходиться в точці з координатами $(\omega_1; L_1)$, де $L_1 = L(\omega_1) = 20 \lg \frac{K_1}{\omega_1}$.

Друга асимптота відповідає зміні частоти в межах $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$. При цьому з співвідношення (2.35) отримаємо

$$\begin{aligned} L(\omega) &= 20 \lg \frac{K_1}{\omega} - 20 \lg \frac{\omega}{\omega_1} = 20 \lg \frac{K_1}{\omega_1} - 40 \lg \frac{\omega}{\omega_1} = \\ &= L_1 - 40 \lg \frac{\omega}{\omega_1}, \quad \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Співвідношення (2.37) є рівнянням відрізка прямої, яка проходить через точки $(\omega_1; L_1)$ та $(\omega_2; L_2)$, де $L_2 = L(\omega_2) = 20 \lg \frac{K_1 \omega_1}{\omega_2^2}$. Нахил цього відрізка складає -40 дБ/дек.

З співвідношень (2.36) та (2.37) видно, що кінець першої асимптоти та початок другої збігаються, тобто в точці з абсцисою $\omega = \omega_1$ відбувається спрягнення першої та другої асимптот ЛАЧХ.

Третю асимптоту будують в діапазоні частот $\omega_2 \leq \omega \leq \omega_3$. В цьому випадку з (2.35) виходить, що

$$\begin{aligned} L(\omega) &= 20 \lg \frac{K_1}{\omega} - 20 \lg \frac{\omega}{\omega_1} + 20 \lg \frac{\omega}{\omega_2} = 20 \lg \frac{K_1 \omega_1}{\omega_2^2} - 20 \lg \frac{\omega}{\omega_2} = \\ &= L_2 - 20 \lg \frac{\omega}{\omega_2}, \quad \omega_2 \leq \omega \leq \omega_3. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Останнє співвідношення є рівнянням відрізка прямої, яка проходить з нахилом -20 дБ/дек через точки $(\omega_2; L_2)$ та $(\omega_3; L_3)$, де $L_3 = L(\omega_3) =$

$= 20 \lg \frac{K_1 \omega_1}{\omega_2 \omega_3}$. Тут також має місце спрягнення другої та третьої асимптот в точці $(\omega_2; L_2)$.

Четверта асимптота відповідає діапазону частот $\omega \geq \omega_3$. Тоді з співвідношення (2.35) отримаємо

$$\begin{aligned} L(\omega) &= 20 \lg \frac{K_1}{\omega} - 20 \lg \frac{\omega}{\omega_1} + 20 \lg \frac{\omega}{\omega_2} - 20 \lg \frac{\omega}{\omega_3} = 20 \lg \frac{K_1 \omega_1}{\omega_2 \omega_3} - 40 \lg \frac{\omega}{\omega_3} = \\ &= L_3 - 40 \lg \frac{\omega}{\omega_3}, \quad \omega \geq \omega_3. \end{aligned} \quad (2.39)$$

З співвідношення (2.39) видно, що четверта (остання) асимптота ЛАЧХ досліджуваної системи являє собою напівпрямую, яка виходить з точки $(\omega_3; L_3)$ та має нахил -40 дБ/дек. В точці $(\omega_3; L_3)$ відбувається спрягнення третьої та четвертої асимптот ЛАЧХ.

Таким чином ЛАЧХ системи з передаточною функцією (2.32) повністю побудована.

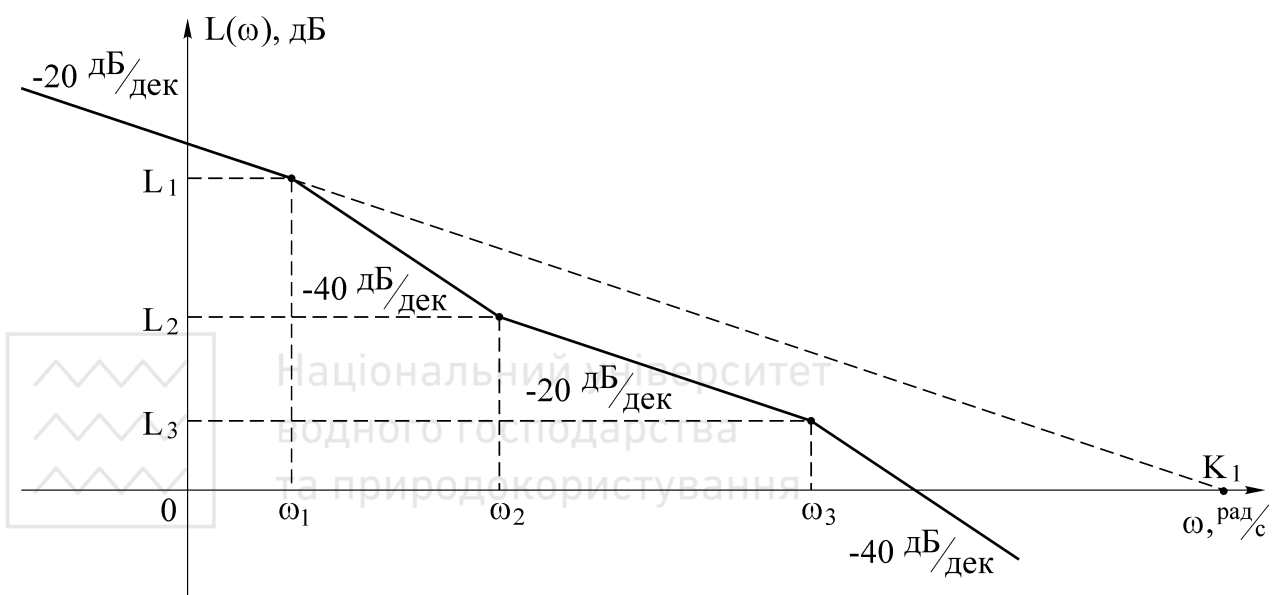


Рисунок 2.3 – Асимптотична ЛАЧХ досліджуваної системи

Сумістивши суміжні асимптоти ЛАЧХ досліджуваної системи, першу – з другою, другу – з третьою, а третю – з четвертою, можна зробити висновок, що при зміні частоти ω (при переході її через значення чергової частоти спрягнення ω_k) нахил асимптоти ЛАЧХ змінюється:

1) на -20 дБ/дек, якщо ω_k належить множині $\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_k}\right)$, який знаходиться в знаменнику передаточної функції досліджуваної системи;

2) на +20 дБ/дек, якщо ω_k належить множнику $\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_k}\right)$, який знаходиться в чисельнику передаточної функції досліджуваної системи;

3) значення нахилу кожної асимптоти ЛАЧХ кратне значенню ± 20 дБ/дек.

Покажемо, що за ЛАЧХ досліджуваної системи може бути відтворена передаточна функція системи та, відповідно, ФЧХ цієї системи.

Звернемося до рис.2.3. При побудові ЛАЧХ ми бачили, що перша асимптота з нахилом -20 дБ/дек відповідає множнику $\frac{K_1}{j\omega}$ в складі передаточної функції системи. Запишемо цей множник.

При переході змінної ω через точку $\omega = \omega_1$ нахил асимптоти стає рівним -40 дБ/дек, тобто змінюється на -20 дБ/дек. Це означає, що в знаменник передаточної функції ми повинні включити множник $\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right)$. Таким чином, на другій ділянці отримаємо співвідношення $\frac{K_1}{j\omega\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right)}$. Далі при збільшенні ω переходимо через точку $\omega = \omega_2$. В цьому випадку нахил асимптоти змінюється на $+20$ дБ/дек, чому відповідає множник $\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right)$ в чисельнику передаточної функції. Таким чином, на третій ділянці отримаємо співвідношення $\frac{K_1\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right)}{j\omega\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right)}$. При $\omega \geq \omega_3$ нахил асимптоти ЛАЧХ знову змінюється на -20 дБ/дек та, відповідно, в знаменник передаточної функції запишемо множник $\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_3}\right)$, тобто на четвертій, останній ділянці отримуємо співвідношення для невідомої передаточної функції досліджуваної системи:

$$K(j\omega) = \frac{K_1\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right)}{j\omega\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_3}\right)}, \quad K(p) = \frac{K_1(1 + p\tau_2)}{p(1 + p\tau_1)(1 + p\tau_3)}, \quad p = j\omega,$$

що збігається з співвідношенням (2.32).

Таким чином, за допомогою ЛАЧХ динамічної системи повністю відтворена передаточна функція цієї системи. Тому для розгляду такої системи побудову ЛФЧХ можна не проводити.

Контрольні запитання

1. На чому базуються часові та частотні методи аналізу лінійних неперервних систем РА?

2. Для описання яких систем РА зручно користуватися диференціальними рівняннями?

3. Як визначається загальне розв'язання диференціального рівняння, яке описує систему РА?

4. Як за диференціальним рівнянням проаналізувати стійкість лінійної неперервної системи РА?

5. Що таке передаточна функція динамічної системи РА?

6. Як формально отримати передаточну функцію динамічної системи РА, якщо відомо диференціальне рівняння цієї системи?

7. За допомогою яких математичних методів можна обчислити зворотне перетворення Лапласа?

8. Визначте відгук запропонованої динамічної системи РА на задану вхідну дію.

9. Що таке імпульсна та перехідна характеристики динамічних систем РА і який зв'язок між ними існує?

10. Як зв'язані імпульсна та перехідна характеристики з передаточною функцією динамічної системи РА?

11. В чому полягає умова фізичної реалізованості системи РА?

12. Визначте імпульсну та перехідну характеристики запропонованої динамічної системи РА.

13. Поясніть використання інтеграла згортки для описання лінійних неперервних динамічних систем РА.

14. Що таке частотні передаточні функції і як їх отримати з комплексної передаточної функції динамічної системи РА?

15. Що таке амплітудно-фазова характеристика системи РА?

16. Як знайти відгук системи РА на довільну вхідну дію?

17. В чому полягає метод побудови логарифмічних частотних характеристик?

18. Назвіть основні правила побудови асимптот логарифмічної АЧХ.

19. Побудуйте логарифмічну АЧХ для запропонованої передаточної функції динамічної системи РА.

20. Як за відомою логарифмічною АЧХ знайти передаточну функцію системи?

3 ПЕРЕДАТОЧНІ ФУНКЦІЇ СИСТЕМ РАДІОАВТОМАТИКИ

3.1 З'єднання кіл систем радіоавтоматики

Будь-яка система РА складається з окремих елементів, які з'єднуються між собою лініями зв'язку. При дослідженні такої системи складають її схему, на якій вказують всі функціональні елементи системи та зв'язки між цими елементами. Таку схему називають функціональною (рис.1.5).

Однак при проведенні математичного аналізу процесів управління має значення не функціональне призначення елементів системи, а їх динамічні характеристики, які задані у вигляді диференціальних рівнянь, а для лінійних систем – у вигляді передаточних функцій цих елементів. Тому складають схему системи РА, в якій вказують динамічні кола системи та зв'язки між ними. Таку схему називають структурною схемою системи РА.

Структурну схему можна отримати з функціональної, замінюючи позначення функціональних елементів системи позначеннями або співвідношеннями для передаточних функцій цих елементів. Так, на рис.3.1 наведена структурна схема, яка складена на основі функціональної схеми рис.1.5.

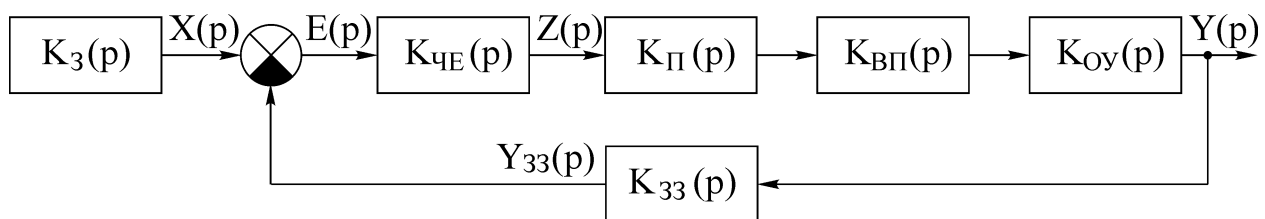


Рисунок 3.1 – Структурна схема системи радіоавтоматики

Структурна схема системи РА дозволяє отримати передаточну функцію або диференціальне рівняння цієї системи за умови, що відомі динамічні характеристики її кіл.

При визначенні передаточної функції порівняно складної системи РА її структурну схему спрощують, користуючись методами перетворення структурних схем, які дозволяють перейти від складних перехресних зв'язків в системі до найпростіших з'єднань. Існує три види таких з'єднань: послідовне, паралельне та зустрічно – паралельне.

Послідовним називають таке з'єднання кіл, при якому, як показано на рис.3.2, вихідний сигнал одного кола є входним сигналом наступного. У відповідності з рис.3.2 маємо

$$\begin{aligned} X_{N+1}(p) &= K(p)X_1(p) = K_N(p)X_N(p) = K_N(p)K_{N-1}(p)X_{N-1}(p) = \dots = \\ &= K_N(p)K_{N-1}(p)\dots K_2(p)K_1(p)X_1(p), \end{aligned}$$

звідки

$$K(p) = K_1(p)K_2(p)\dots K_{N-1}(p)K_N(p) = \prod_{k=1}^N K_k(p). \quad (3.1)$$

Таким чином, при послідовному з'єднанні кіл передаточна функція такого з'єднання дорівнює добутку передаточних функцій окремих кіл.

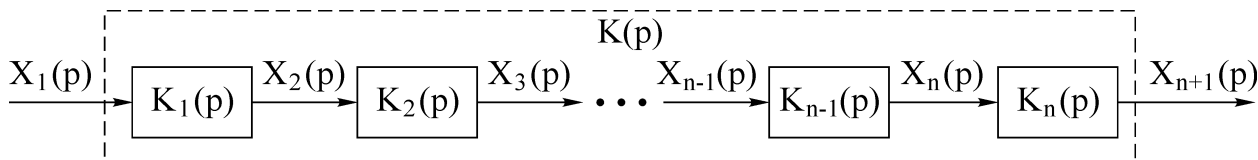


Рисунок 3.2 – Послідовне з'єднання кіл систем радіоавтоматики

Співвідношення (3.1) виконується за умови, що з'єднання виходу кожного k – го кола з входом наступного, $(k + 1)$ – го кола не змінює передаточну функцію k – го кола. Якщо ця умова не виконується, то передаточну функцію $K_k(p)$ k – го кола необхідно складати з врахуванням впливу наступного кола.

При паралельному з'єднанні кіл (рис.3.3) вхідний сигнал $X_1(p)$ потрапляє на входи всіх кіл, які входять в це з'єднання, а вихідний сигнал $X_2(p)$ дорівнює сумі вихідних сигналів окремих елементів, тобто

$$X_2(p) = K(p)X_1(p) = \sum_{k=1}^N K_k(p)X_1(p) = \left[\sum_{k=1}^N K_k(p) \right] X_1(p),$$

звідки

$$K(p) = \sum_{k=1}^N K_k(p). \quad (3.2)$$

Таким чином, передаточна функція складного кола, яке складається з N паралельно з'єднаних кіл, дорівнює сумі передаточних функцій окремих кіл.

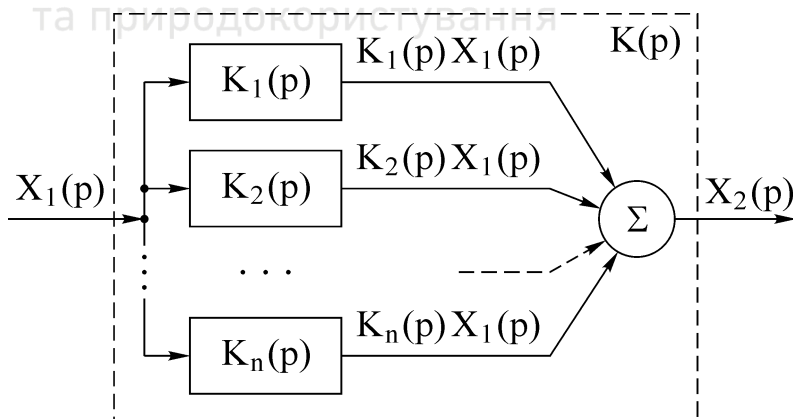


Рисунок 3.3 – Паралельне з'єднання кіл систем радіоавтоматики

При зустрічно-паралельному зв'язку (рис.3.4) на вхід кола з передаточною функцією $K_1(p)$, охопленого зворотним зв'язком за допомогою кола

з передаточною функцією $K_2(p)$, потрапляє сума або різниця (в залежності від характеру зворотного зв'язку: сума – при позитивному, різниця – при негативному) двох сигналів – вхідного $X_1(p)$ та вихідного $X_2(p)$, який проходить через коло зворотного зв'язку з передаточною функцією $K_2(p)$.

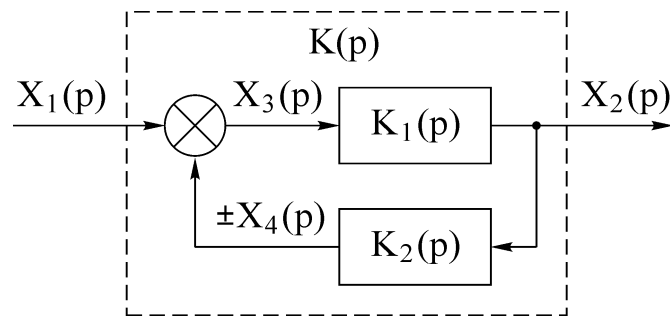


Рисунок 3.4 – Зустрічно-паралельне з'єднання кіл систем радіоавтоматики

Для структурної схеми рис.3.4 маємо

$$X_3(p) = X_1(p) \pm X_4(p), \quad X_4(p) = K_2(p)X_2(p),$$

звідки

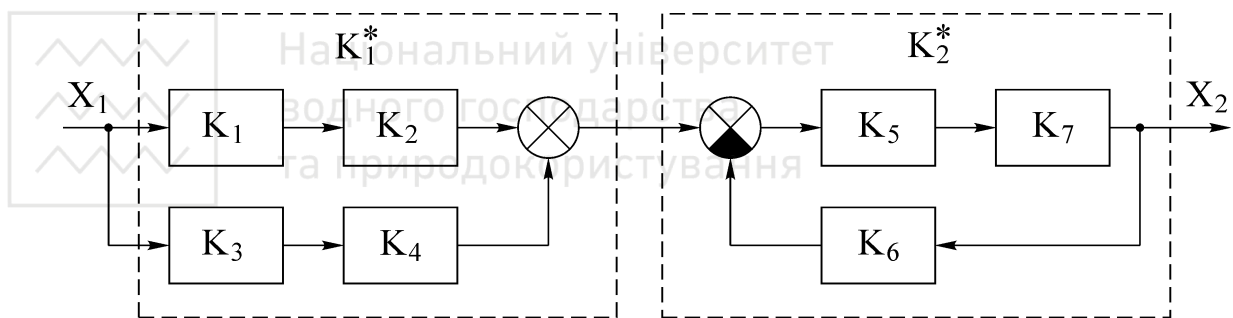
$$X_2(p) = K(p)X_1(p) = K_1(p)X_3(p) = K_1(p)[X_1(p) \pm K_2(p)X_2(p)].$$

Після перетворень отримаємо

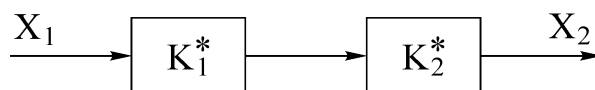
$$K(p) = \frac{K_1(p)}{1 \mp K_1(p)K_2(p)}, \quad (3.3)$$

де знак “–” відповідає позитивному зворотному зв'язку, а знак “+” – негативному.

Приклад 3.1. Розглянемо структурну схему системи, наведену на рис.3.5, а.



а)



б)

Рисунок 3.5 – До знаходження еквівалентної передаточної функції лінійної системи

Для того, щоб знайти еквівалентну передаточну функцію такої системи $K(p)$, зведемо її до структурної схеми рис.3.5, б, для якої

$$K_1^*(p) = K_1(p)K_2(p) + K_3(p)K_4(p), \quad K_2^*(p) = \frac{K_5(p)K_7(p)}{1 + K_5(p)K_6(p)K_7(p)},$$

звідки

$$K(p) = \frac{X_2(p)}{X_1(p)} = K_1^*(p)K_2^*(p) = \frac{K_5(p)K_7(p)[K_1(p)K_2(p) + K_3(p)K_4(p)]}{1 + K_5(p)K_6(p)K_7(p)}.$$

3.2 Перетворення структурних схем лінійних систем радіоавтоматики

Будь – яка структурна схема лінійної системи РА складається з елементів трьох типів: кіл, вузлів та елементів порівняння, які з'єднуються між собою лініями зв'язку. В якості елементів порівняння використовуються суматори та віднімачі, на виході яких утворюється сума або різниця двох вхідних сигналів.

Якщо в структурній схемі досліджуваної системи є ділянка, яка містить складні перехресні зв'язки, що не можуть бути зведені до елементарних з'єднань кіл, то цю ділянку необхідно виділити та провести з нею структурні перетворення з метою приведення всіх цих з'єднань до елементарних, тобто типових. Структурні перетворення полягають в зміні взаємного розташування елементів структурної схеми (кіл, вузлів та суматорів) таким чином, щоб, не змінюючи вхідні та вихідні сигнали ділянки структурної схеми, яка підлягає перетворенню, спростити характер з'єднань її кіл.

Правила зміни взаємного розташування елементів структурних схем визначаються таблицею 3.1. Розглянемо використання цих правил на окремих прикладах. Для структурної схеми лінійної динамічної системи (рис.3.6, а) маємо таке рівняння

$$X_2 = K_3(X_3 + X_4) = K_3(K_1X_1 + K_2X_1) = K_3(K_1 + K_2)X_1. \quad (3.4)$$

Припустимо, що необхідно перенести вузол з входу кола K_1 на його вихід. Після такого перенесення (рис.3.6, б) значення сигналу X_3 на вході елемента порівняння не змінюється, а значення сигналу X_4 буде дорівнювати $X'_4 = K_2X_1 = K_1K_2X_1$ замість попереднього значення $X_4 = K_2X_1$. У відповідності з цим зміниться вихідний сигнал X_2 . Для того, щоб вихідний сигнал X_2 залишився незмінним, необхідно сигнал X'_4 домножити на передаточну функцію $K_1^{-1}(p) = \frac{1}{K_1(p)}$, що призводить до необхідності включення послі-

довно з колом K_1 кола K_1^{-1} , як показано на рис.3.6, в, тоді

$$\begin{aligned} X_2 &= K_3(X_3 + X_4) = K_3(K_1X_1 + K_2K_1^{-1}X_3) = \\ &= K_3(K_1X_1 + K_2K_1^{-1}K_1X_1) = K_3(K_1 + K_2)X_1, \end{aligned}$$

що збігається з співвідношенням (3.4).

Далі припустимо, що в схемі рис.3.6, а необхідно перенести елемент порівняння з входу кола K_3 на його вихід. Оскільки в співвідношенні (3.4) K_3 є спільним множником для сигналів X_3 та X_4 , які є вихідними сигналами кіл K_1 та K_2 , то для збереження незмінного значення вихідного сигналу X_2 необхідно коло з передаточною функцією $K_3(p)$ включити послідовно з кожним з кіл K_1 та K_2 (див. рис.3.6, г), тоді

$$X_2 = X_3 + X_4 = K_1 K_3 X_1 + K_2 K_3 X_1 = K_3 (K_1 + K_2) X_1,$$

що також збігається з співвідношенням (3.4).

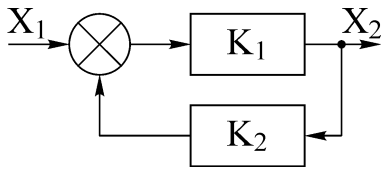
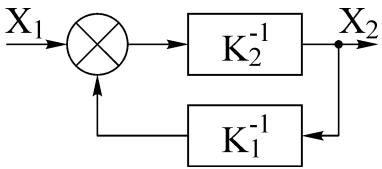
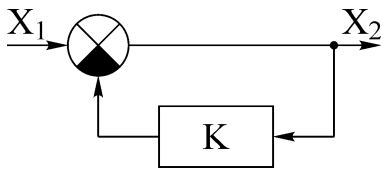
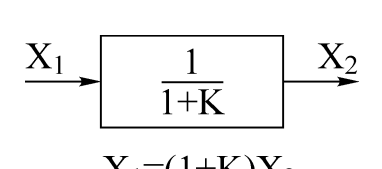
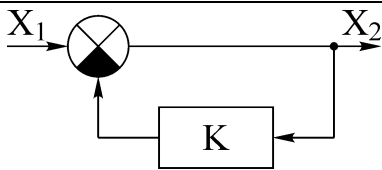
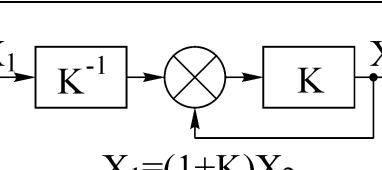
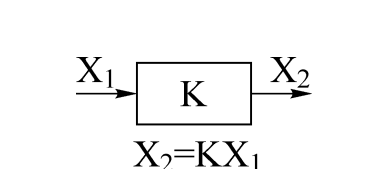
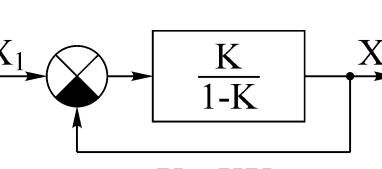
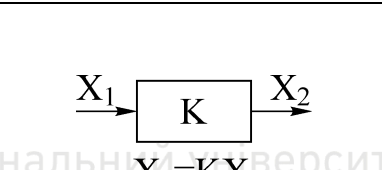
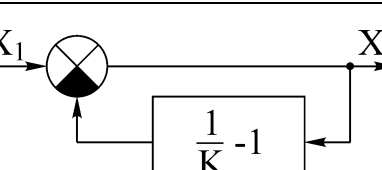
Таблиця 3.1 – Правила перетворення структурних схем лінійних систем

Операція	Вихідна схема	Еквівалентна схема
Перестановка кіл		
Об'єднання послідовно з'єднаних кіл в одне коло		
Перенесення вузла з виходу на вхід кола		
Перенесення вузла з входу на вихід кола		
Зміна місць ліній зв'язку		
Перестановка суматорів або елементів порівняння		
Перебудова схеми елементів порівняння		

Продовження таблиці 3.1

Перенесення вузла з виходу на вхід суматора		
Перенесення вузла з входу на вихід суматора		
Перенесення суматора з виходу на вхід кола		
Перенесення суматора з входу на вихід кола		
Об'єднання паралельно з'єднаних кіл в одне коло		
Об'єднання контуру з жорстким зворотним зв'язком		
Об'єднання контуру з гнучким зворотним зв'язком		
Перехід до одиничного зворотного зв'язку		

Продовження таблиці 3.1

Взаємна заміна кіл прямої передачі та зворотного зв'язку		
Об'єднання контуру з передаточною функцією в колі зворотного зв'язку в одне коло	 $X_1 = (1+K)X_2$	 $X_1 = (1+K)X_2$
Перебудова контуру з передаточною функцією в колі зворотного зв'язку	 $X_1 = (1+K)X_2$	 $X_1 = (1+K)X_2$
Заміна одного кола контуром з передаточною функцією в колі прямої передачі	 $X_2 = KX_1$	 $X_2 = KX_1$
Заміна одного кола контуром з передаточною функцією в колі зворотного зв'язку	 $X_2 = KX_1$	 $X_2 = KX_1$

Перенесемо в структурній схемі рис.3.6, а елемент порівняння з виходу кола K_2 на його вхід, в результаті чого отримаємо структурну схему рис.3.6, д, для якої вихідний сигнал X_2 дорівнює

$$X_2 = K_2 K_3 (X_1 + X_3) = K_2 K_3 (K_1 X_1 + X_1) = K_3 (K_1 K_2 + K_2) X_1$$

замість (3.4). Вихідний сигнал X_2 при наведеному структурному перетворенні залишиться незмінним лише в тому випадку, якщо послідовно з колом K_1 включити коло K_2^{-1} , як показано на рис.3.6, є, при цьому

$$X_2 = K_2 K_3 (X_1 + X_3) = K_2 K_3 (K_1 K_2^{-1} X_1 + X_1) = K_3 (K_1 + K_2) X_1,$$

що збігається з співвідношенням (3.4).

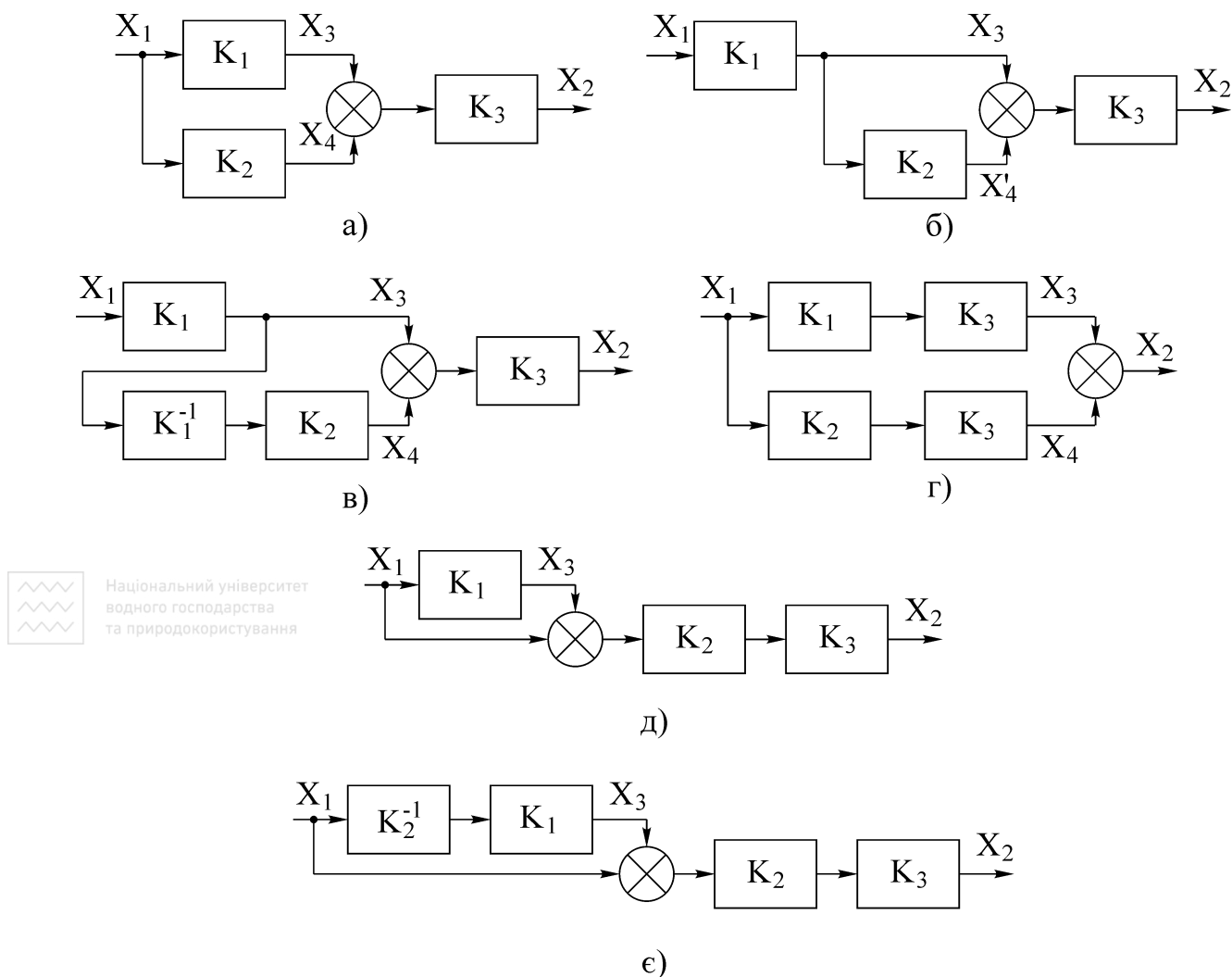


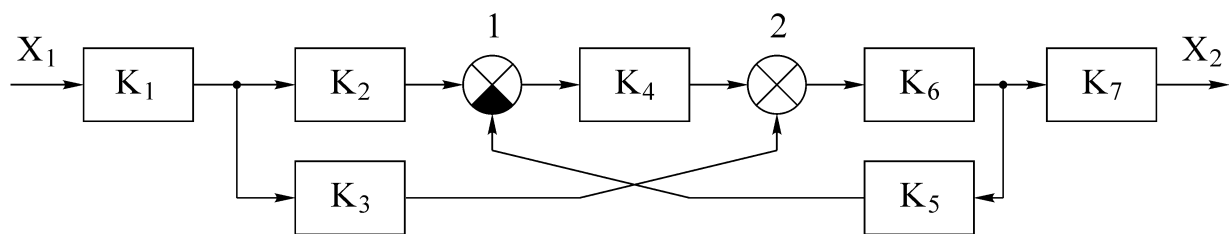
Рисунок 3.6 – Перетворення структурної схеми лінійної динамічної системи

Приклад 3.2. Розглянемо структурну схему, наведену на рис.3.7, а. В цій схемі перехресні зв'язки обумовлені наявністю між елементами порівняння 1 та 2 кола K_4 . Для того, щоб в такій структурній схемі виключити перехресні зв'язки, достатньо, наприклад, елемент порівняння 1 перенести з входу кола K_4 на його вихід. В цьому випадку отримаємо структурну схему, наведену на рис.3.7, б, та, помінявши елементи порівняння місцями, приходимо до структурної схеми рис.3.7, в, для якої

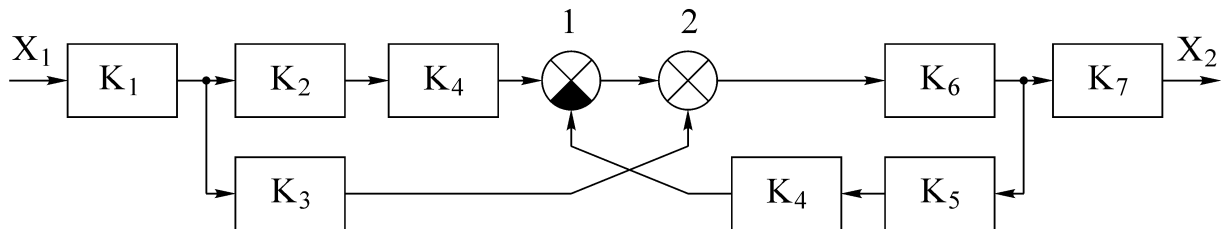
$$K_2^*(p) = K_2(p)K_4(p) + K_3(p), \quad K_3^*(p) = \frac{K_6(p)}{1 + K_4(p)K_5(p)K_6(p)},$$

звідки

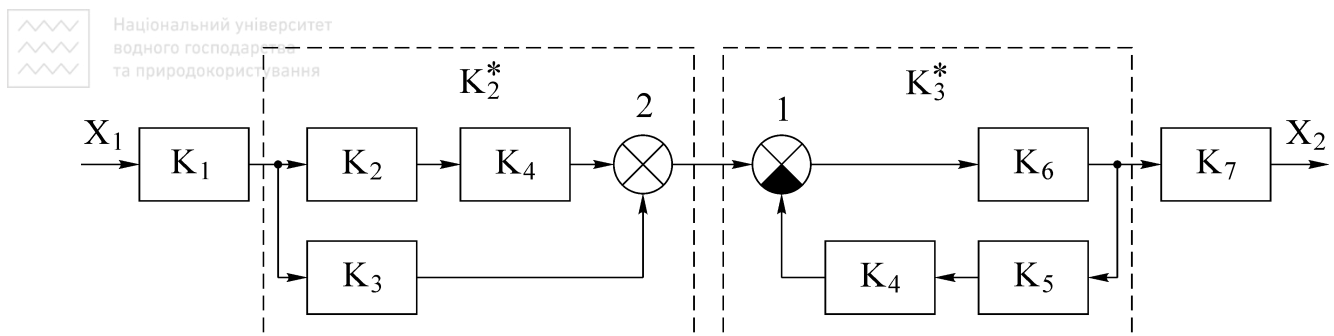
$$K(p) = \frac{X_2(p)}{X_1(p)} = K_1(p)K_2^*(p)K_3^*(p)K_7(p) = \frac{K_1(p)[K_2(p)K_4(p) + K_3(p)]K_6(p)K_7(p)}{1 + K_4(p)K_5(p)K_6(p)}.$$



а)



б)



в)

Рисунок 3.7 – Перетворення структурної схеми лінійної динамічної системи радіоавтоматики з перехресними зв'язками

3.3 Передаточна функція замкненої системи

При дослідженні систем РА виникають різні задачі, наприклад, визначення характеристик перехідного процесу в системі, визначення її точності, завадостійкості і т.і. Вирішення цих задач потребує знаходження залежностей між різними змінними системи РА, наприклад, між вхідним та вихідним сигналами системи, між помилкою та вхідним сигналом і т.і. Ці залежності встановлюються за допомогою відповідних передаточних функцій системи.

Процес управління характеризується залежністю вихідного сигналу $Y(t)$ від вхідного сигналу $X(t)$. Така залежність визначається передаточною функцією замкненої системи (2.9), яка може бути знайдена методами, викладеними в п.2.3, якщо відомі структурна схема системи та передаточні функції її кіл.

Для того, щоб отримати співвідношення для передаточної функції замкненої системи в загальному вигляді, необхідно мати диференціальне рівнян-

ня цієї системи (2.7). Тоді у відповідності з (2.8) та (2.9), перейшовши до зображень за Лапасом, маємо

$$Y(p) = K_{\text{зам}}(p)X(p), \quad (3.5)$$

де

$$K_{\text{зам}}(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{R(p)}{D(p)} = \frac{\sum_{i=0}^M b_i p^i}{\sum_{k=0}^N a_k p^k}. \quad (3.6)$$

В останньому співвідношенні $K_{\text{зам}}(p)$ – передаточна функція замкненої системи РА; $R(p)$ та $D(p)$ – поліноми степеня M та N відповідно.

Передаточна функція замкненої системи є однією з основних передаточних функцій замкненої системи РА.



Національний університет
водного господарства
та природокористування

3.4 Передаточна функція розімкненої системи

Для аналізу та синтезу замкнених систем РА разом з передаточною функцією замкненої системи дуже часто використовується передаточна функція розімкненої системи. Передаточною функцією розімкненої системи називають передаточну функцію, яка встановлює залежність між вихідним сигналом $Y(t)$ замкненої системи РА та сигналом розузгодження $E(t)$, тобто

$$K_{\text{роз}}(p) = \frac{Y(p)}{E(p)}, \quad (3.7)$$

$$\text{де } E(p) = \int_0^{\infty} E(t)e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} [X(t) - Y_{\text{зз}}(t)]e^{-pt} dt = X(p) - Y_{\text{зз}}(p).$$

Відзначимо, що в процесі визначення передаточної функції замкненої системи РА за її структурною схемою ми завжди проходимо етап визначення передаточної функції розімкненої системи. Знайдемо, наприклад, передаточну функцію розімкненої системи у відповідності з структурною схемою рис.3.1.

Ділянку структурної схеми замкненої системи РА між точкою прикладення сигналу розузгодження $E(t)$ та точкою фіксації вихідного сигналу $Y(t)$ називають розімкненим контуром системи РА.

У відповідності з рис.3.1, співвідношенням (3.1) та визначенням (3.7)

$$Y(p) = K_{\text{ЧЕ}}(p)K_{\text{П}}(p)K_{\text{ВП}}(p)K_{\text{ОУ}}(p)E(p) = K_{\text{роз}}(p)E(p),$$

де

$$K_{\text{роз}}(p) = K_{\text{ЧЕ}}(p)K_{\text{П}}(p)K_{\text{ВП}}(p)K_{\text{ОУ}}(p) - \quad (3.8)$$

передаточна функція розімкненої системи, що відповідає замкненій системі РА рис.3.1. Приведемо структурну схему рис.3.1 до вигляду схеми, представ-

леної на рис.3.8. Тоді, використовуючи співвідношення (3.3), знаходимо передаточну функцію замкненої системи:

$$K_{\text{зам}}(p) = \frac{K_{\text{роз}}(p)}{1 + K_{33}(p)K_{\text{роз}}(p)}, \quad (3.9)$$

а при 100% – ному зворотному зв'язку маємо

$$K_{\text{зам}}(p) = \frac{K_{\text{роз}}(p)}{1 + K_{\text{роз}}(p)}. \quad (3.10)$$

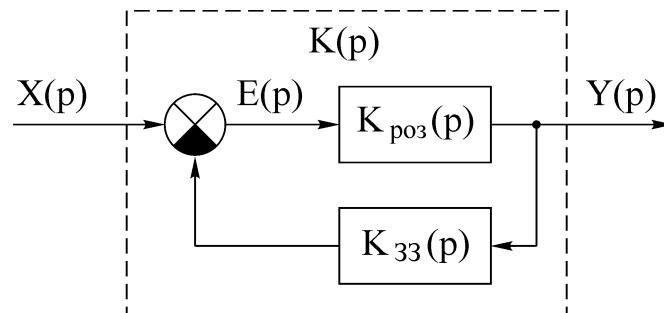


Рисунок 3.8 – Структурна схема, еквівалентна структурній схемі рис.3.1

Співвідношення (3.9) та (3.10) встановлюють зв'язок між передаточними функціями замкненої та розімкненої систем, що відповідають одній замкненій системі РА. З цих співвідношень можна отримати зворотну залежність

$$K_{\text{роз}}(p) = \frac{K_{\text{зам}}(p)}{1 - K_{33}(p)K_{\text{зам}}(p)}, \quad (3.11)$$

або, при 100% – ному зворотному зв'язку

$$K_{\text{роз}}(p) = \frac{K_{\text{зам}}(p)}{1 - K_{\text{зам}}(p)} = \frac{R(p)}{D(p) - R(p)} = \frac{R(p)}{Q(p)}, \quad (3.12)$$

де $Q(p) = D(p) - R(p)$ – поліном степеня N.

Відзначимо, що співвідношення (3.12) можна отримати з (3.7), якщо врахувати співвідношення (3.5) та (3.6).

Роль передаточної функції розімкненої системи в дослідженні замкнених систем РА є досить великою. Наприклад, на використанні передаточної функції розімкненої системи базується один з основних методів аналізу та синтезу замкнених автоматичних систем – метод логарифмічних частотних характеристик.

3.5 Передаточна функція для сигналу розузгодження

При дослідженні точності замкнених систем РА досить важливою характеристикою є залежність сигналу розузгодження $E(t)$ від вхідного сигналу $X(t)$. Ця залежність визначається передаточною функцією для сигналу розузгодження за вхідним сигналом та позначається $K_E(p)$. Якщо передаточна функція $K_E(p)$ відома, то за її визначенням маємо $E(p) = K_E(p)X(p)$.

Для того, щоб знайти цю передаточну функцію за заданою структурною схемою системи РА, доцільно виразити її за допомогою передаточної функції замкненої системи $K_{зам}(p)$ або за допомогою передаточної функції розімкненої системи $K_{роз}(p)$:

$$K_E(p) = \frac{E(p)}{X(p)} = \frac{X(p) - Y_{33}(p)}{X(p)} = 1 - \frac{Y(p)}{X(p)} K_{33}(p) = 1 - K_{33}(p) K_{зам}(p), \quad (3.13)$$

або, враховуючи співвідношення (3.9),

$$K_E(p) = \frac{1}{1 + K_{роз}(p) K_{33}(p)}. \quad (3.14)$$

Після того, коли передаточну функцію $K_E(p)$ знайдено, сигнал розузгодження системи РА може бути отриманий у вигляді конкретної функції часу за допомогою зворотного перетворення Лапласа, тобто

$$E(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} E(p) e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} K_E(p) X(p) e^{pt} dp.$$

3.6 Передаточна функція для помилки за завадою

Всі системи РА працюють, як правило, в умовах дії завад. При цьому вхідний сигнал $X(t)$ завжди прикладений до входу системи, а завада $\vartheta(t)$ може бути прикладена до будь-якої точки системи, як показано на рис.3.9, де розімкнений контур системи РА розділений на дві частини: перша, яка має передаточну функцію $K_1(p)$, не підлягає дії завади, а на вхід другої, яка має передаточну функцію $K_2(p)$, діє завада $\vartheta(t)$. В цьому випадку передаточна функція розімкненого контуру системи $K_{роз}(p) = K_1(p) K_2(p)$.

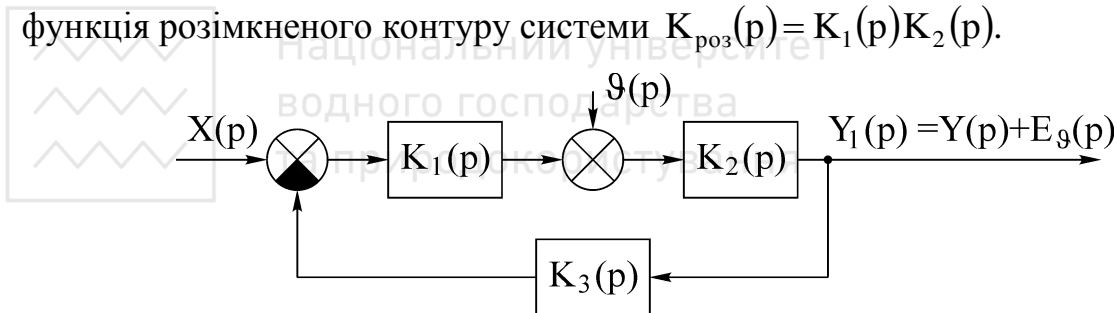


Рисунок 3.9 – Структурна схема системи РА, на яку діє завада $\vartheta(p)$

Вихідний сигнал системи РА може бути представлений у вигляді $Y_1(p) = Y(p) + E_\vartheta(p)$, де $Y(p) = K_{зам}(p) X(p)$ – реакція системи на вхідний сигнал $X(p)$; $E_\vartheta(p) = \frac{K_2(p)}{1 + K_1(p) K_2(p) K_3(p)} \vartheta(p)$ – реакція системи на заваду $\vartheta(p)$.

Складова $E_\vartheta(p)$ вихідного сигналу $Y_1(p)$ спотворює значення дійсного вихідного сигналу $Y(p)$, тобто є помилкою системи, яка обумовлена завадою $\vartheta(p)$.

Відношення зображення за Лапласом $E_9(p)$ цієї помилки до зображення завади $\vartheta(p)$ визначає передаточну функцію системи РА за завадою, тобто

$$K_9(p) = \frac{E_9(p)}{\vartheta(p)} = \frac{K_2(p)}{1 + K_{\text{роз}}(p)K_{33}(p)} = \frac{K_2(p)}{1 + K_1(p)K_2(p)K_3(p)}. \quad (3.15)$$

В окремому випадку, коли завада діє на вхід системи, з співвідношення (3.15) отримаємо

$$K_9(p) = \frac{K_1(p)K_2(p)}{1 + K_1(p)K_2(p)K_3(p)} = \frac{K_{\text{роз}}(p)}{1 + K_{\text{роз}}(p)K_{33}(p)} = K_{\text{зам}}(p).$$

3.7 Типові передаточні функції систем радіоавтоматики



Національний університет
водного господарства
та природокористування

Більшість функціональних елементів систем РА мають властивості аперіодичних та безінерційних кіл. Окрім цих кіл до складу систем РА найчастіше входять декілька інтегровальних та форсувальних кіл. Таким чином, типова передаточна функція розімкненої системи РА може бути записана у вигляді

$$K_{\text{роз}}(p) = \frac{K_r \prod_{i=1}^M (1 + p\tau_i)}{p^r \prod_{k=1}^{N-r} (1 + p\tau_k)}, \quad N > M, \quad (3.16)$$

де N – порядок диференціального рівняння (2.7) замкненої системи; r – кількість інтегровальних кіл у складі системи; M – кількість форсувальних кіл у складі системи; K_r – коефіцієнт передачі системи за r -ою похідною вхідного сигналу. Для типових систем РА, які будуть розглядатися далі, $r \leq 2$.

Як буде показано в главі 6, якість системи РА (її точність) сильно залежить від кількості інтегровальних кіл у складі цієї системи. При збільшенні кількості інтегровальних кіл точність системи суттєво підвищується.

Замкнену систему РА, в якій немає інтегровальних кіл ($r = 0$), називають статичною. Вона має передаточну функцію розімкненого контуру типу

$$K_{\text{роз}}(p) = \frac{K_0 \prod_{i=1}^M (1 + p\tau_i)}{\prod_{k=1}^N (1 + p\tau_k)}. \quad (3.17)$$

Замкнена система РА, до складу якої входить одне інтегровальне коло ($r = 1$), має передаточну функцію розімкненого контуру вигляду

$$K_{\text{роз}}(p) = \frac{K_1 \prod_{i=1}^M (1 + p\tau_i)}{p \prod_{k=1}^{N-1} (1 + p\tau_k)}, \quad (3.18)$$

де K_1 – коефіцієнт передачі системи за швидкістю, та називається астатичною системою з астатизмом першого порядку.

Замкнена система РА з двома інтегровальними колами ($r = 2$), що має передаточну функцію розімкненого контуру вигляду

$$K_{\text{роз}}(p) = \frac{K_2 \prod_{i=1}^M (1 + p\tau_i)}{p^2 \prod_{k=1}^{N-2} (1 + p\tau_k)}, \quad (3.19)$$

де K_2 – коефіцієнт передачі системи за прискоренням, називається астатичною системою з астатизмом другого порядку.

3.8 Передаточні функції багатоконтурних систем

До багатоконтурних відносяться системи РА, в яких окрім замкненого контуру з головним зворотним зв'язком є контури, які утворені стабілізуювальними зворотними зв'язками, що введені для отримання потрібних динамічних властивостей системи. Передаточні функції таких систем знаходяться шляхом послідовного зведення структурної схеми багатоконтурної системи до еквівалентної одноконтурної.

На рис.3.10 наведена структурна схема двоконтурної системи РА. Для зведення такої системи до еквівалентної одноконтурної спочатку необхідно знайти передаточну функцію внутрішнього контуру, яка визначається за виразом

$$K_{\text{БК}}(p) = \frac{K_2(p)}{1 + K_2(p)K_3(p)}.$$

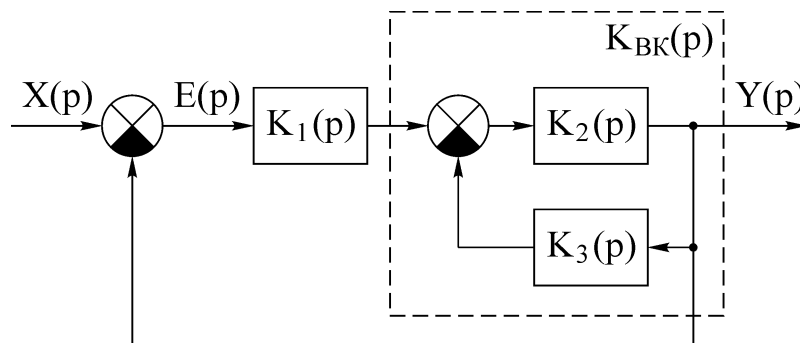


Рисунок 3.10 – Структурна схема двоконтурної системи радіоавтоматики

Після цього структурну схему системи можна представити як одноконтурну, для якої передаточна функція розімкненої системи визначається як

$$K_{\text{роз}}(p) = K_1(p)K_{\text{БК}}(p) = \frac{K_1(p)K_2(p)}{1 + K_2(p)K_3(p)},$$

а передаточна функція замкненої системи – співвідношенням

$$K_{\text{зам}}(p) = \frac{K_1(p)K_2(p)}{1 + K_2(p)[K_1(p) + K_3(p)]}.$$

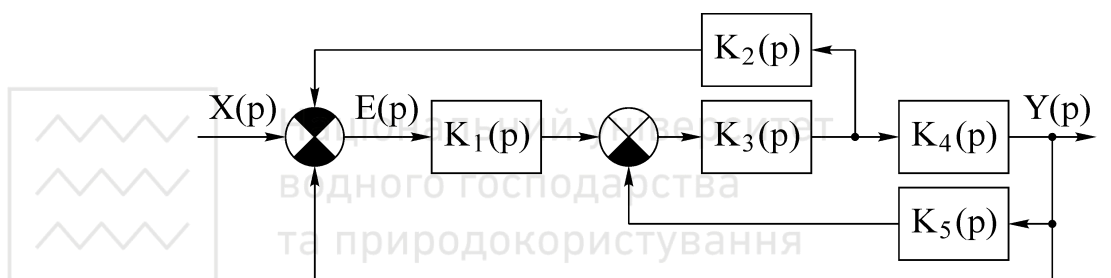
На рис.3.11, а наведена структурна схема системи з перехресними зв'язками. Нескладними структурними перетвореннями таку структурну схему можна привести до вигляду, в якому перехресні зв'язки відсутні (рис.3.11, б). Після таких перетворень передаточні функції знаходяться за методом послідовної згортки двоконтурної системи до одноконтурної. Тоді передаточні функції розімкненої та замкненої систем (див. рис.3.11, б) визначаються такими виразами:



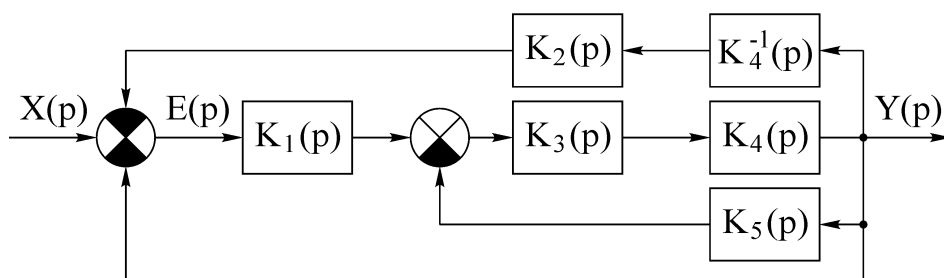
Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$K_{\text{роз}}(p) = \frac{K_1(p)K_{\text{БК}}(p)}{1 + K_1(p)K_{\text{БК}}(p)K_2(p)K_4^{-1}(p)};$$

$$\begin{aligned} K_{\text{зам}}(p) &= \frac{K_1(p)K_{\text{БК}}(p)}{1 + K_1(p)K_{\text{БК}}(p)[1 + K_2(p)K_4^{-1}(p)]} = \\ &= \frac{K_1(p)K_3(p)K_4(p)}{1 + K_3(p)K_4(p)\{K_5(p) + K_1(p)[1 + K_2(p)K_4^{-1}(p)]\}} = \\ &= \frac{K_1(p)K_3(p)K_4(p)}{1 + K_3(p)K_4(p)K_5(p) + K_1(p)K_3(p)K_4(p) + K_1(p)K_2(p)K_3(p)}. \end{aligned}$$



а)



б)

Рисунок 3.11 – Структурні схеми багатоконтурної системи: а – з перехресними зворотними зв'язками; б – з неперехресними зворотними зв'язками

Приклад 3.3. Розглянемо структурну схему системи, наведену на рис.3.12. Для того, щоб знайти еквівалентну передаточну функцію такої системи $K_{\text{екв}}(p)$, необхідно виразити вихідний сигнал цієї системи $Y(p)$ тільки через вхідний сигнал $X(p)$ та передаточні функції каскадів системи $K_k(p)$, виключивши з цього рівняння проміжні сигнали $X_k(p)$:

$$\begin{aligned} Y(p) &= K_4(p)X_5(p) = K_4(p)[X_1(p) - X_3(p)] = K_1(p)K_4(p)X(p) - K_3(p)K_4(p)X_4(p) = \\ &= K_1(p)K_4(p)X(p) - K_3(p)K_4(p)[X_6(p) - X_2(p)] = \\ &= K_1(p)K_4(p)X(p) - K_3(p)K_4(p)K_5(p)Y(p) + K_2(p)K_3(p)K_4(p)X(p). \end{aligned}$$

Останнє співвідношення можна переписати таким чином:

$$Y(p)[1 + K_3(p)K_4(p)K_5(p)] = X(p)[K_1(p)K_4(p) + K_2(p)K_3(p)K_4(p)],$$

звідки можна знайти вираз для еквівалентної передаточної функції системи

$K_{\text{екв}}(p)$:

$$K_{\text{екв}}(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{K_4(p)[K_1(p) + K_2(p)K_3(p)]}{1 + K_3(p)K_4(p)K_5(p)}.$$

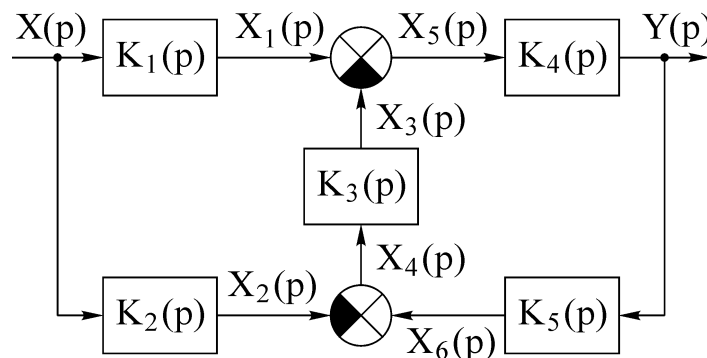


Рисунок 3.12 – Структурна схема складної системи радіоавтоматики

Таким чином, для будь-якої системи РА можна знайти еквівалентну передаточну функцію за умови, що відомі структурна схема системи та передаточні функції її кіл.

Контрольні запитання

1. Чим відрізняється передаточна функція системи РА при послідовному з'єднанні кіл від передаточної функції при паралельному з'єднанні кіл?
2. Що розуміють під структурним перетворенням лінійних систем РА?
3. Охарактеризуйте основні правила перетворення структурних схем систем.
4. Що таке передаточна функція замкненої системи РА і як вона визначається?
5. Як за відомою передаточною функцією замкненої системи РА визначити передаточну функцію розімкненої системи РА?

6. Що таке передаточна функція для сигналу розузгодження та яким чином вона визначається?

7. Яким чином передаточна функція для помилки за завадою залежить від місця прикладання завади?

8. В якому випадку передаточна функція для помилки за завадою буде дорівнювати передаточній функції замкненої системи?

9. Що таке типова передаточна функція системи РА і який вона має вигляд?

10. Чим типова передаточна функція статичної системи РА відрізняється від типової передаточної функції астатичної системи РА?

11. Що таке багатоконтурна система РА?

12. За яким алгоритмом можна знайти передаточну функцію багатоконтурної системи РА?



Національний університет
водного господарства
та природокористування

4 ТИПОВІ ДИНАМІЧНІ КОЛА ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ РАДІОАВТОМАТИКИ

4.1 Класифікація динамічних кіл лінійних систем радіоавтоматики

Замкнені автоматичні системи складаються з складних динамічних кіл, які описуються диференціальними рівняннями високого порядку. Для полегшення математичного дослідження таких систем, а також тому, що еквівалентна структурна схема повинна бути складена з типових кіл, складні кола ділять на більш прості, елементарні кола, які описуються диференціальними рівняннями не вище другого порядку

$$a_2 \frac{d^2 U_{\text{вих}}(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dU_{\text{вих}}(t)}{dt} + a_0 U_{\text{вих}}(t) = b_1 \frac{dU_{\text{вх}}(t)}{dt} + b_0 U_{\text{вх}}(t) \quad (4.1)$$

та мають передаточні функції вигляду

$$K(p) = \frac{U_{\text{вих}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)} = \frac{b_1 p + b_0}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}. \quad (4.2)$$

Такі кола називають типовими. В співвідношеннях (4.1) та (4.2) деякі коефіцієнти можуть дорівнювати нулю. При рівності нулю деяких коефіцієнтів буде змінюватись вид диференціального рівняння та передаточної функції, що призведе до зміни динамічних властивостей кола. Тому кола автоматичних систем класифікують за виглядом їх диференціальних рівнянь (або за виглядом їх передаточних функцій). Тому всі пристрої, які описуються однаковими диференціальними рівняннями та відповідно мають однакові передаточні функції, відносяться до однієї класифікаційної групи динамічних кіл незалежно від їх призначення, конструкції, принципу дії та ін.

Типові кола діляться на мінімальнофазові, тобто кола, у яких АЧХ однозначно зв'язана з ФЧХ, та немінімальнофазові, стійкі та нестійкі, ідеальні та реальні. Елементарні динамічні кола діляться на позиційні, диференціальні та інтегровальні. До позиційних кіл відносять безінерційне коло, аперіодичне коло першого порядку, аперіодичне коло другого порядку та коливальне коло. Диференціальні кола діляться на ідеальні диференціальні, інерційні диференціальні та форсувальні. До інтегровальних кіл відносять ідеальні інтегровальні, інерційні інтегровальні та ізодромні.

В лінійних аналогових системах використовуються мінімальнофазові стійкі типові кола.

Розглянемо математичне описання типових кіл, які використовуються в лінійних аналогових системах радіоавтоматики.



Національний університет
водного господарства
та природокористування

4.2 Аперіодичне коло першого порядку

Аперіодичним колом першого порядку називають коло, яке описується диференціальним рівнянням першого порядку

$$\tau \frac{dU_{\text{вих}}(t)}{dt} + U_{\text{вих}}(t) = K U_{\text{вх}}(t), \quad (4.3)$$

де τ – стала часу кола; K – коефіцієнт передачі кола.

До аперіодичних кіл першого порядку відносять виконавчі електродвигуни, підсилювачі потужності, магнітні підсилювачі і т. і. Наприклад, залежність швидкості обертання якоря виконавчого електродвигуна Ω_d від напруги управління U_y описується диференціальним рівнянням

$$\tau_d \frac{d\Omega_d(t)}{dt} + \Omega_d(t) = K_d U_y(t).$$

Рівнянням аналогічного виду описуються процеси в RC – фільтрах низьких частот (при $K = 1$): $\tau_\phi \frac{dU_{\text{вих}}(t)}{dt} + U_{\text{вих}}(t) = U_{\text{вх}}(t).$

Аперіодичні кола є найбільш поширеними колами у складі систем РА.

З співвідношення (4.3) отримаємо передаточну функцію аперіодичного кола першого порядку

$$K(p) = \frac{U_{\text{вих}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)} = \frac{K}{1 + p\tau}, \quad \text{де } p = s + j\omega, \quad (4.4)$$

та знайдемо АЧХ та ФЧХ такого кола:

$$|K(j\omega)| = A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} = \frac{K}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}; \quad (4.5)$$

$$\text{Arg} \{K(j\omega)\} = \varphi(\omega) = -\arctg \omega\tau = -\arctg \frac{\omega}{\omega_c}, \quad (4.6)$$

де $\omega_c = \frac{1}{\tau}$ – частота спрягнення аперіодичного кола першого порядку.

З співвідношення (4.5) отримаємо вираз для логарифмічної АЧХ такого кола у вигляді

$$L(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}. \quad (4.7)$$

Перехідну характеристику аперіодичного кола першого порядку отримаємо з такого співвідношення:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} U_{\text{вх}}(p) K(p) e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{K}{p(1+p\tau)} e^{pt} dp = K \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \quad (4.8)$$

де $U_{\text{вх}}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} U_{\text{вх}}(t) e^{-pt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} 1(t) e^{-pt} dt = \frac{1}{p}$ – зображення за Лапласом функції включення (функції Хевісайда) $1(t)$.

Перехідна характеристика аперіодичного кола першого порядку (рис.4.1, в) має аперіодичний (неперіодичний, неколивальний) характер, тобто вихідний сигнал такого кола при ступінчастій вхідній дії змінюється монотонно, асимптотично наближаючись до свого усталеного значення. На практиці тривалість перехідного процесу обмежують величиною $t_{\pi} = 3\tau$, тоді $h(t_{\pi}) = 0.95h(\infty)$.

Імпульсна характеристика такого кола визначається співвідношенням

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt} = \frac{K}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (4.9)$$

Графіки часових та частотних характеристик аперіодичного кола першого порядку наведені на рис.4.1.

4.3 Безінерційне коло

При зменшенні сталої часу τ аперіодичного кола першого порядку зменшується тривалість перехідних процесів $t_{\pi} = 3\tau$ та розширюється смуга пропускання $\Delta\omega = \omega_c$ такого кола. В цьому випадку перехідна характеристика кола за своїм виглядом все більше наближається до вхідної дії (функції включення), тобто при $\tau \rightarrow 0$ вихідний сигнал кола $U_{\text{вих}}(t)$ в точності відтворює (з відповідним масштабом) вхідний сигнал $U_{\text{вх}}(t)$, тобто при $\tau = 0$ з співвідношення (4.3) отримаємо диференціальне рівняння безінерційного кола у вигляді

$$U_{\text{вих}}(t) = K U_{\text{вх}}(t). \quad (4.10)$$

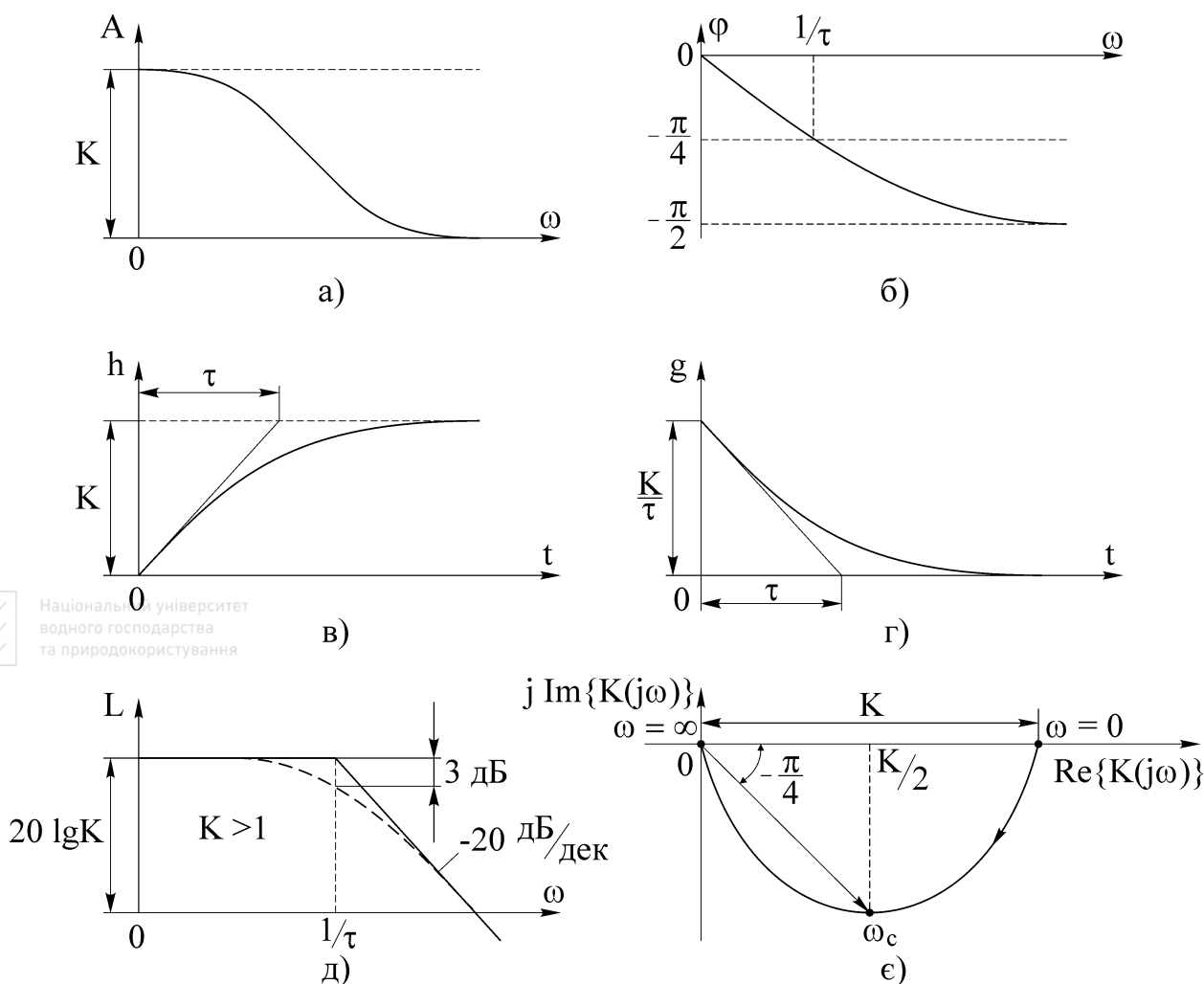


Рисунок 4.1 – Часові та частотні характеристики аперіодичного кола першого порядку: а – АЧХ; б – ФЧХ; в – перехідна характеристика; г – імпульсна характеристика; д – логарифмічна АЧХ; є – годограф частотної характеристики

Таким чином коло, вихідний сигнал якого пропорційний вхідному в будь-який момент часу, називають безінерційним. З вищенаведеного виходить, що тривалість перехідних процесів в безінерційному колі дорівнює нулю (перехідні процеси відсутні), а смуга пропускання такого кола є нескінченно великою.

На практиці до безінерційних кіл відносять будь-які пристрої, смуга пропускання яких значно більша ширини спектру вхідного сигналу. Властивості безінерційного кола мають такі елементи систем РА, як дискримінатори, широкосмугові підсилювачі, подільники напруги, редуктори і т.і.

З співвідношення (4.10) отримаємо передаточну функцію, а також частотні та часові характеристики безінерційного кола:

$$K(p) = K = \text{const};$$

$$A(\omega) = K = \text{const};$$

$$\varphi(\omega) = 0;$$

$$L(\omega) = 20 \lg K;$$

$$h(t) = K 1(t);$$

$$g(t) = K \frac{d1(t)}{dt} = K \delta(t).$$

Аналіз наведених співвідношень показує, що амплітудно-фазова характеристика безінерційного кола вироджується у точку, яка лежить на осі дійсних значень на відстані K від початку координат. АЧХ безінерційного кола є нескінченна пряма, паралельна осі частот, що характеризує нескінченну ширину смуги пропускання такого кола.

Графіки часових та частотних характеристик безінерційного кола наведені на рис.4.2.

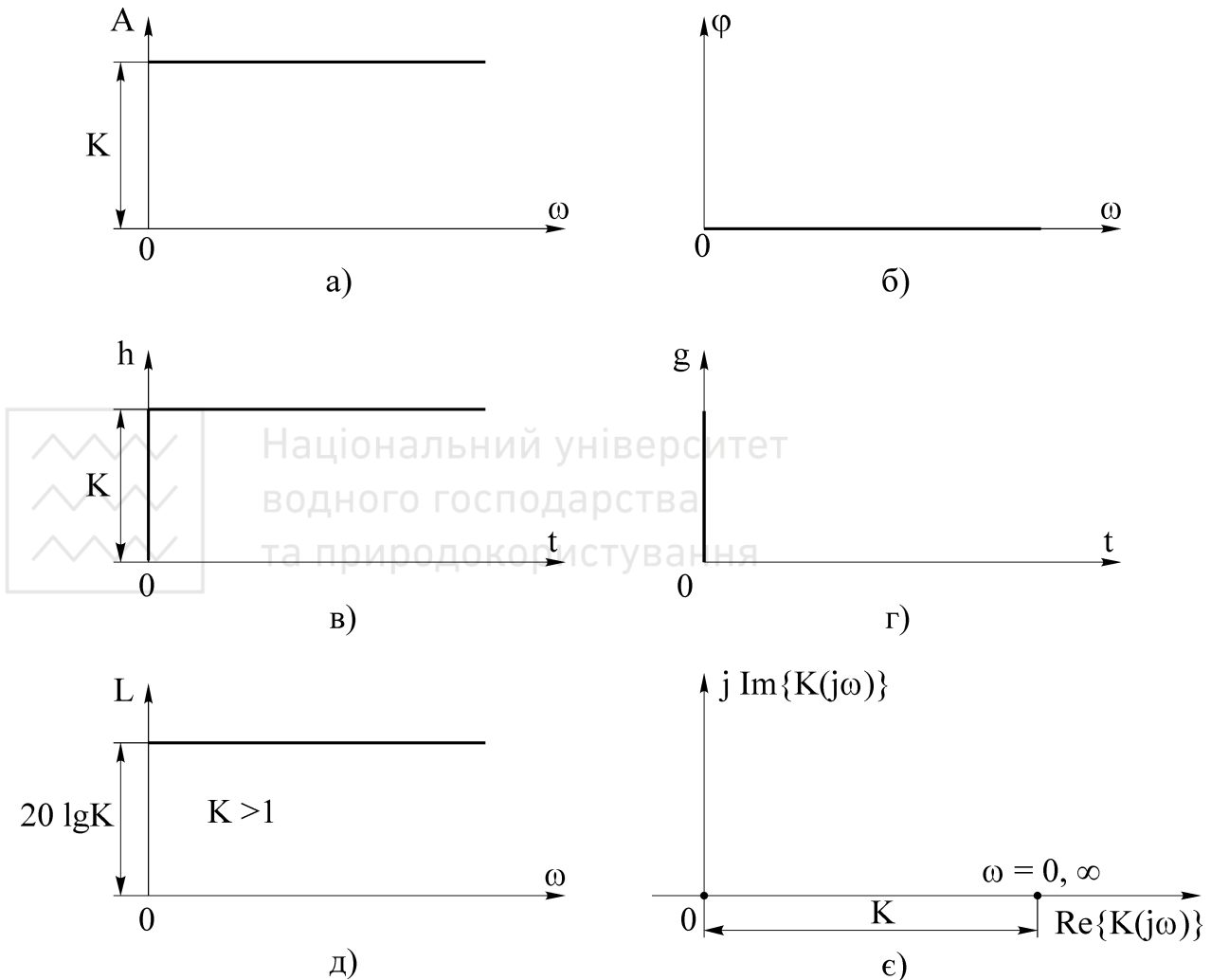


Рисунок 4.2 – Часові та частотні характеристики безінерційного кола

Приклад 4.1. Розглянемо RC – коло, наведене на рис.4.3. Передаточна функція такого кола відповідає аперіодичному колу першого порядку $K(p) = \frac{K}{1 + p\tau}$, де $K = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$, $\tau = \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2}$. Із зменшенням ємності конденсатора стала часу зменшується, а при $C = 0$ отримаємо безінерційне коло – подільник напруги з коефіцієнтом передачі $K = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$, передаточна функція якого має вигляд $K(p) = K$.

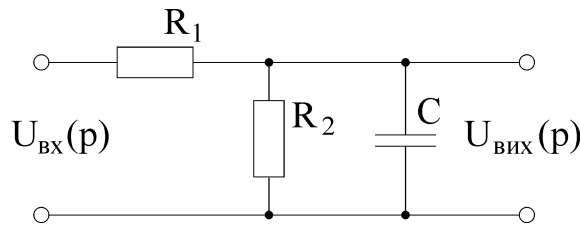


Рисунок 4.3 – Електрична схема RC – кола

4.4 Коливальне коло

Таке коло описується диференціальним рівнянням другого порядку

$$\tau^2 \frac{d^2 U_{\text{вих}}(t)}{dt^2} + 2\alpha\tau \frac{dU_{\text{вих}}(t)}{dt} + U_{\text{вих}}(t) = K U_{\text{вх}}(t), \quad (4.11)$$

або

$$\frac{d^2 U_{\text{вих}}(t)}{dt^2} + 2\alpha\omega_0 \frac{dU_{\text{вих}}(t)}{dt} + \omega_0^2 U_{\text{вих}}(t) = K \omega_0^2 U_{\text{вх}}(t), \quad (4.12)$$

де τ – стала часу; α – коефіцієнт згасання; $\omega_0 = \frac{1}{\tau}$ – власна частота незга-
саючих коливань; K – коефіцієнт передачі кола.

До коливальних кіл відносять резонансний RLC – контур; акселерометр (вимірювач прискорень), який являє собою механічну коливальну систему, і т.і.

Коливальні кола радіотехнічних пристроїв, які мають різко виражені резонансні властивості, характеризуються порівняно малими коефіцієнтами згасання ($\alpha \approx 10^{-2}$), а коливальні кола автоматичних систем мають значення коефіцієнта згасання, які наближаються до одиниці ($\alpha = 0.5 \div 0.8$).

З співвідношень (4.11) та (4.12) отримаємо передаточну функцію коливального кола у вигляді

$$K(p) = \frac{K}{\tau^2 p^2 + 2\alpha\tau p + 1} = \frac{K \omega_0^2}{p^2 + 2\alpha\omega_0 p + \omega_0^2}, \quad (4.13)$$

звідки знаходимо співвідношення для АЧХ, ФЧХ та логарифмічної АЧХ, які відповідно будуть мати такий вигляд:

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\alpha^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} = \frac{K}{\sqrt{(1 - v^2)^2 + 4\alpha^2 v^2}}; \quad (4.14)$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg \frac{2\alpha \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = -\arctg \frac{2\alpha v}{1 - v^2}; \quad (4.15)$$

$$L(\omega) = 20 \lg K + 20 \lg \frac{1}{\sqrt{(1 - v^2)^2 + 4\alpha^2 v^2}}, \quad (4.16)$$

де $v = \frac{\omega}{\omega_0}$ – відносна частота коливального кола.

Перехідна характеристика коливального кола визначається таким співвідношенням:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} U_{\text{вх}}(p) K(p) e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{K\omega_0^2}{p^3 + 2\alpha\omega_0 p^2 + \omega_0^2 p} e^{pt} dp = \quad (4.17)$$

$$= K \left\{ 1 - e^{-\alpha\omega_0 t} \left(\cos \lambda t + \frac{d\omega_0}{\lambda} \sin \lambda t \right) \right\},$$

де $\lambda = \omega_0 \sqrt{1 - \alpha^2}$ – частота згасаючих коливань.

Тривалість перехідного процесу оцінюється величиною $t_{\pi} = \frac{3}{\alpha\omega_0}$.

Імпульсна характеристика коливального кола визначається виходячи з такого співвідношення:

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt} = \frac{K\omega_0^2}{\lambda} e^{-\alpha\omega_0 t} \sin \lambda t. \quad (4.18)$$

Коефіцієнт згасання α визначається рівнем розсіювання енергії за одиницю часу. Коло, яке описується диференціальними рівняннями (4.11) та (4.12), буде власне коливальним лише при $\alpha < 1$. Якщо $\alpha \geq 1$, то таке коло буде еквівалентне послідовному з'єднанню двох аперіодичних кіл першого порядку, динамічні характеристики яких розглянуті в п.4.2.

В окремому випадку, коли $\alpha = 0$, що відповідає консервативному колу, частотні та часові характеристики будуть визначатись таким чином:

$$A(\omega) = \frac{K\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{K}{1 - v^2};$$

$$\varphi(\omega) = 0;$$

$$L(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg (1 - v^2);$$

$$h(t) = K(1 - \cos \lambda t) = K(1 - \cos \omega_0 t);$$

$$g(t) = \frac{K\omega_0^2}{\lambda} \sin \lambda t = K\omega_0 \sin \omega_0 t,$$

тобто перехідна та імпульсна характеристики – це незгасаючі гармонічні коливання.

Графіки часових та частотних характеристик коливального кола наведені на рис.4.4, а графіки часових та частотних характеристик консервативного кола – на рис.4.5.

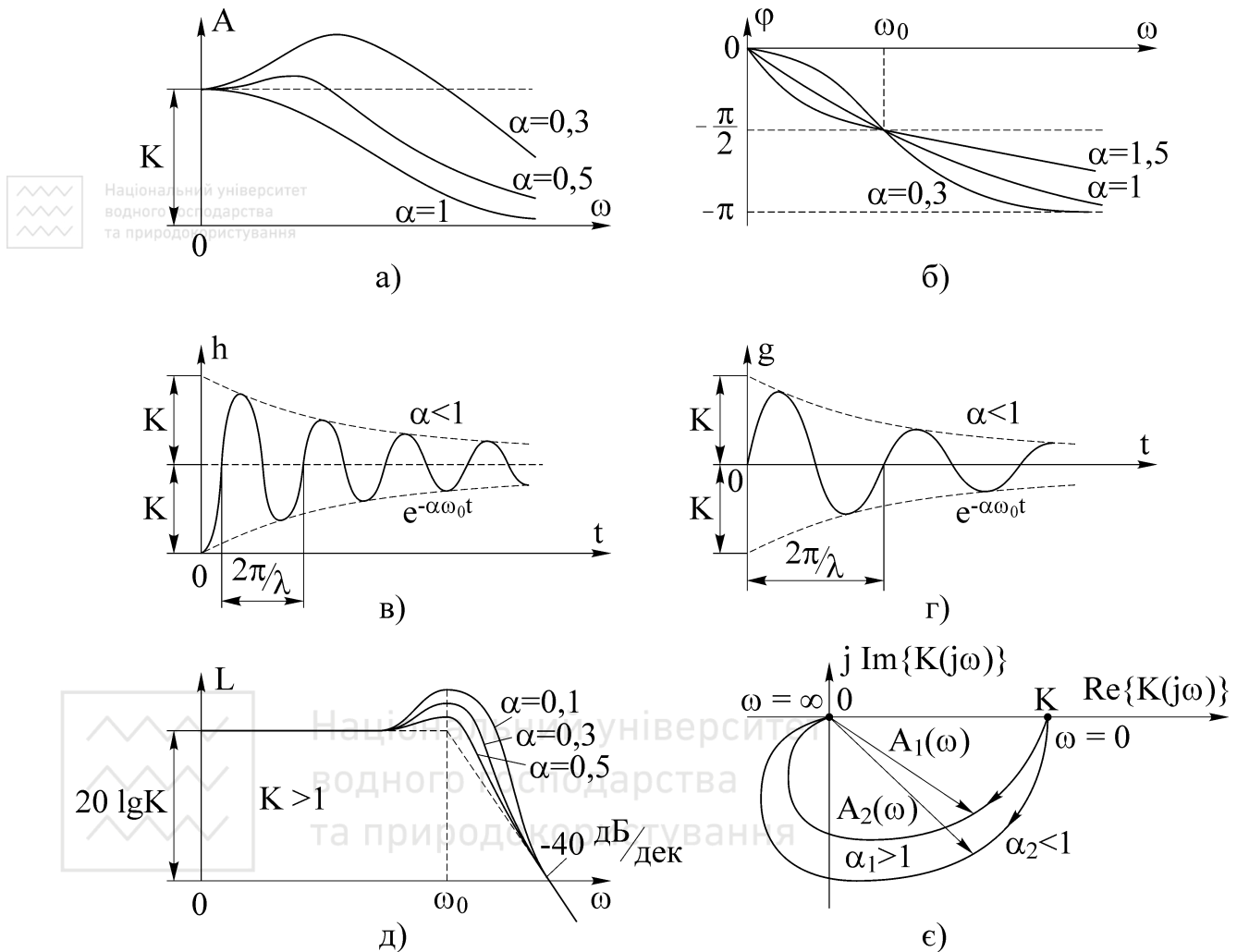


Рисунок 4.4 – Часові та частотні характеристики коливального кола

4.5 Аперіодичне коло другого порядку

При наближенні коефіцієнта згасання α до одиниці коливальний характер перехідної характеристики стає менш помітним. В цьому випадку зменшується частота згасаючих коливань та, відповідно, зменшується тривалість перехідного процесу. При $\alpha \geq 1$ корені характеристичного рівняння стають дійсними, тобто частота згасаючих коливань стає уявною величиною, а перехідна характеристика такого кола набуває вигляду аперіодичної кривої.

Таким чином, коливальне коло перетворюється на аперіодичне коло другого порядку, яке описується диференціальним рівнянням вигляду

$$\tau_a^2 \frac{d^2 U_{\text{вих}}(t)}{dt^2} + \tau_b \frac{dU_{\text{вих}}(t)}{dt} + U_{\text{вих}}(t) = K U_{\text{вх}}(t), \quad \text{при } \tau_b \geq 2\tau_a, \quad (4.19)$$

або при зміні позначень

$$\tau_1 \tau_2 \frac{d^2 U_{\text{вих}}(t)}{dt^2} + (\tau_1 + \tau_2) \frac{dU_{\text{вих}}(t)}{dt} + U_{\text{вих}}(t) = K U_{\text{вх}}(t), \quad (4.20)$$

де зв'язок між сталими часу описується рівнянням

$$\tau_{1,2} = 0.5\tau_b \pm \sqrt{0.25\tau_b^2 - \tau_a^2}.$$

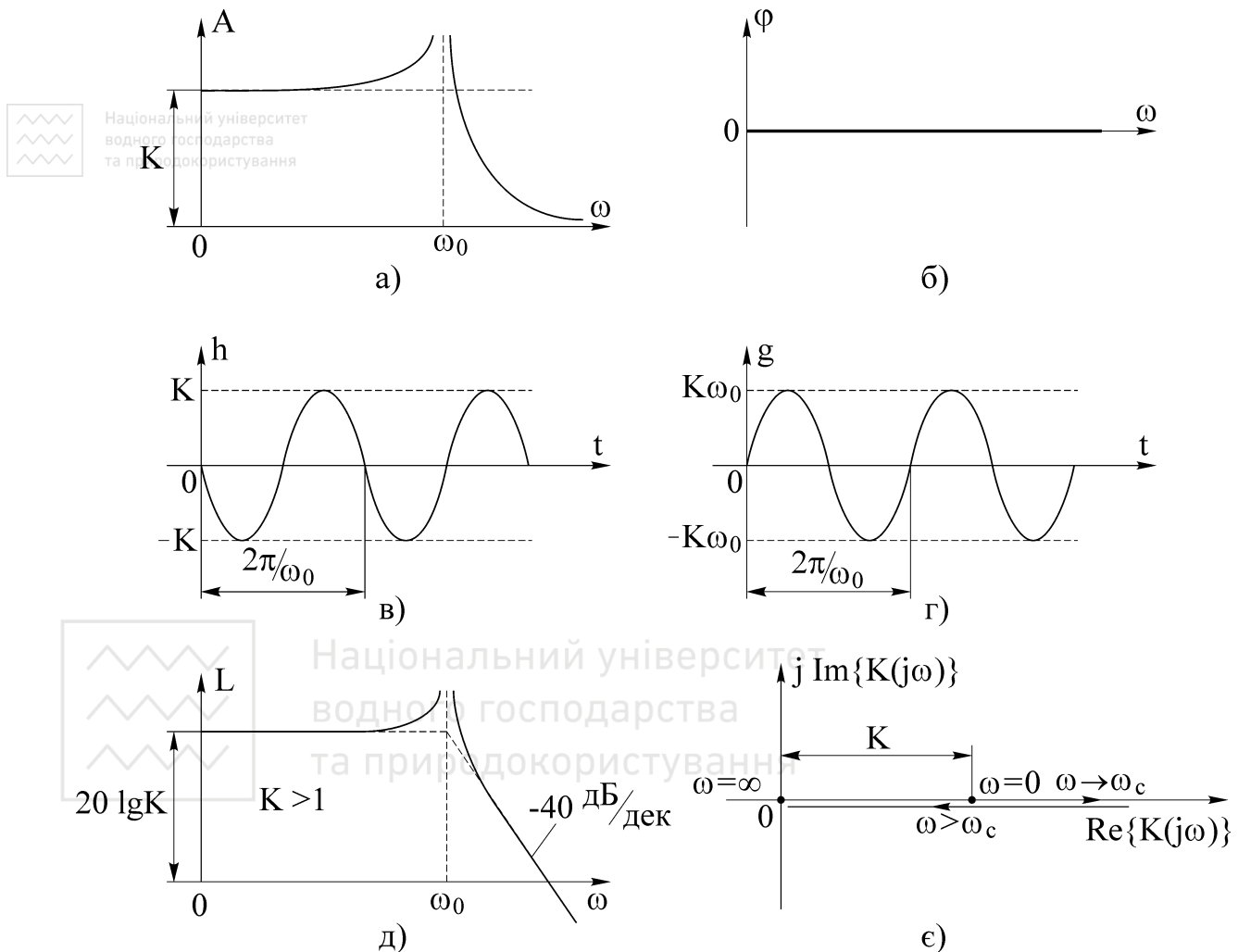


Рисунок 4.5 – Часові та частотні характеристики консервативного кола

У відповідності з співвідношеннями (4.19) та (4.20) передаточна функція аперіодичного кола другого порядку має вигляд

$$K(p) = \frac{K}{\tau_a^2 p^2 + \tau_b p + 1} = \frac{K}{\tau_1 \tau_2 p^2 + (\tau_1 + \tau_2) p + 1} = \frac{K}{(1 + p\tau_1)(1 + p\tau_2)}, \quad (4.21)$$

що структурно відповідає послідовному з'єднанню двох аперіодичних кіл першого порядку з передаточними функціями $K_1(p) = \frac{K_1}{1 + p\tau_1}$ та $K_2(p) = \frac{K_2}{1 + p\tau_2}$, при цьому $K = K_1 K_2$.

З (4.21) знаходимо співвідношення для АЧХ, ФЧХ та логарифмічної АЧХ аперіодичного кола другого порядку, які відповідно будуть мати такий вигляд:

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{(1 - \tau_1 \tau_2 \omega^2)^2 + (\tau_1 + \tau_2)^2 \omega^2}} = \frac{K}{\sqrt{1 + (\tau_1^2 + \tau_2^2) \omega^2 + \tau_1^2 \tau_2^2 \omega^4}}; \quad (4.22)$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg \frac{\omega(\tau_1 + \tau_2)}{1 - \omega^2 \tau_1 \tau_2}; \quad (4.23)$$

$$L(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg \sqrt{1 + (\tau_1^2 + \tau_2^2) \omega^2 + \tau_1^2 \tau_2^2 \omega^4}. \quad (4.24)$$

Перехідна характеристика аперіодичного кола другого порядку визначається таким співвідношенням:

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} U_{\text{вих}}(p) K(p) e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{K}{p(1 + p\tau_1)(1 + p\tau_2)} e^{pt} dp = \\ &= K \left(1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Тривалість перехідного процесу оцінюється величиною $t_{\pi} = 1.5(\tau_1 + \tau_2)$.

Імпульсна характеристика такого кола визначається співвідношенням

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt} = \frac{K}{\tau_1 - \tau_2} \left(e^{-\frac{t}{\tau_1}} - e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right). \quad (4.26)$$

Графіки часових та частотних характеристик аперіодичного кола другого порядку наведені на рис.4.6.

4.6 Ідеальне диференціувальне коло

Ідеальним диференціувальним колом називають коло, вихідна напруга якого пропорційна похідній вхідної величини, тобто диференціальне рівняння такого кола має вигляд

$$U_{\text{вих}}(t) = K \frac{dU_{\text{вх}}(t)}{dt}, \quad (4.27)$$

а передаточна функція визначається як

$$K(p) = \frac{U_{\text{вих}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)} = K p. \quad (4.28)$$

Прикладом ідеального диференціатора є тахогенератор, вихідна напруга якого $U_T(t)$ пропорційна частоті обертання $\Omega(t)$ його ротора, тобто $U_T(t) = K\Omega(t)$. Якщо в якості вхідного сигналу тахогенератора розглядати не швидкість обертання, а кут повороту $\alpha(t)$ його ротора, то $U_T(t) = K \frac{d\alpha(t)}{dt}$, тобто такий пристрій є ідеальним диференціювальним колом.

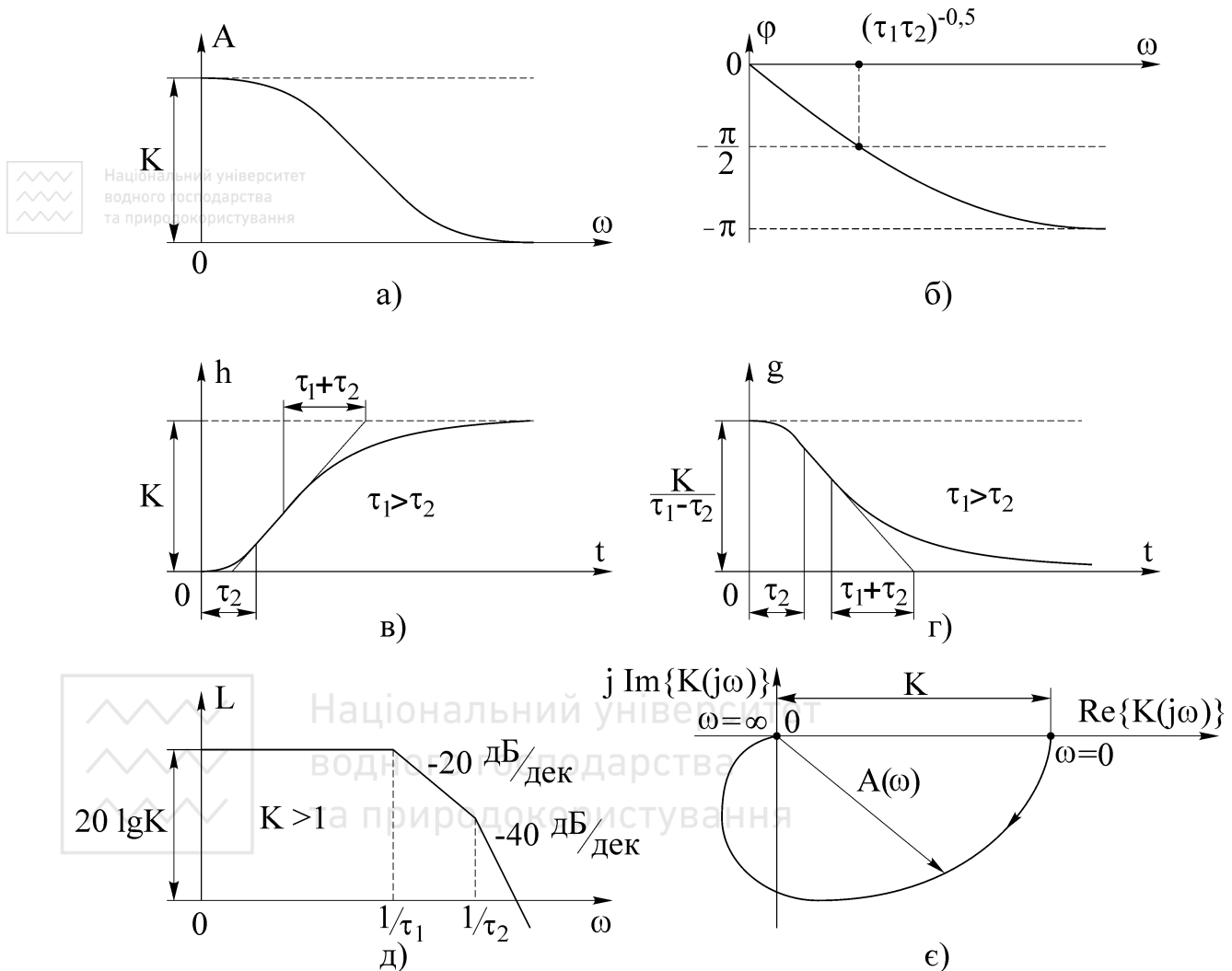


Рисунок 4.6 – Частотні та часові характеристики аперіодичного кола другого порядку

З (4.28) знаходимо співвідношення для АЧХ, ФЧХ та логарифмічної АЧХ ідеального диференціювального кола, які відповідно будуть мати такий вигляд:

$$A(\omega) = K\omega; \quad (4.29)$$

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}; \quad (4.30)$$

$$L(\omega) = 20 \lg(K\omega). \quad (4.31)$$

Перехідна характеристика ідеального диференціувального кола визначається таким співвідношенням:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} U_{\text{вх}}(p) K(p) e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} K e^{pt} dp = K\delta(t), \quad (4.32)$$

де $\delta(t)$ – дельта-функція або функція Дірака.

Імпульсна характеристика такого кола визначається співвідношенням

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt} = K \frac{d\delta(t)}{dt}. \quad (4.33)$$

Особливістю ідеального диференціувального кола є його властивість вносити постійний фазовий зсув 90° у всій смузі частот від 0 до ∞ .

Графіки часових та частотних характеристик ідеального диференціувального кола наведені на рис.4.7.

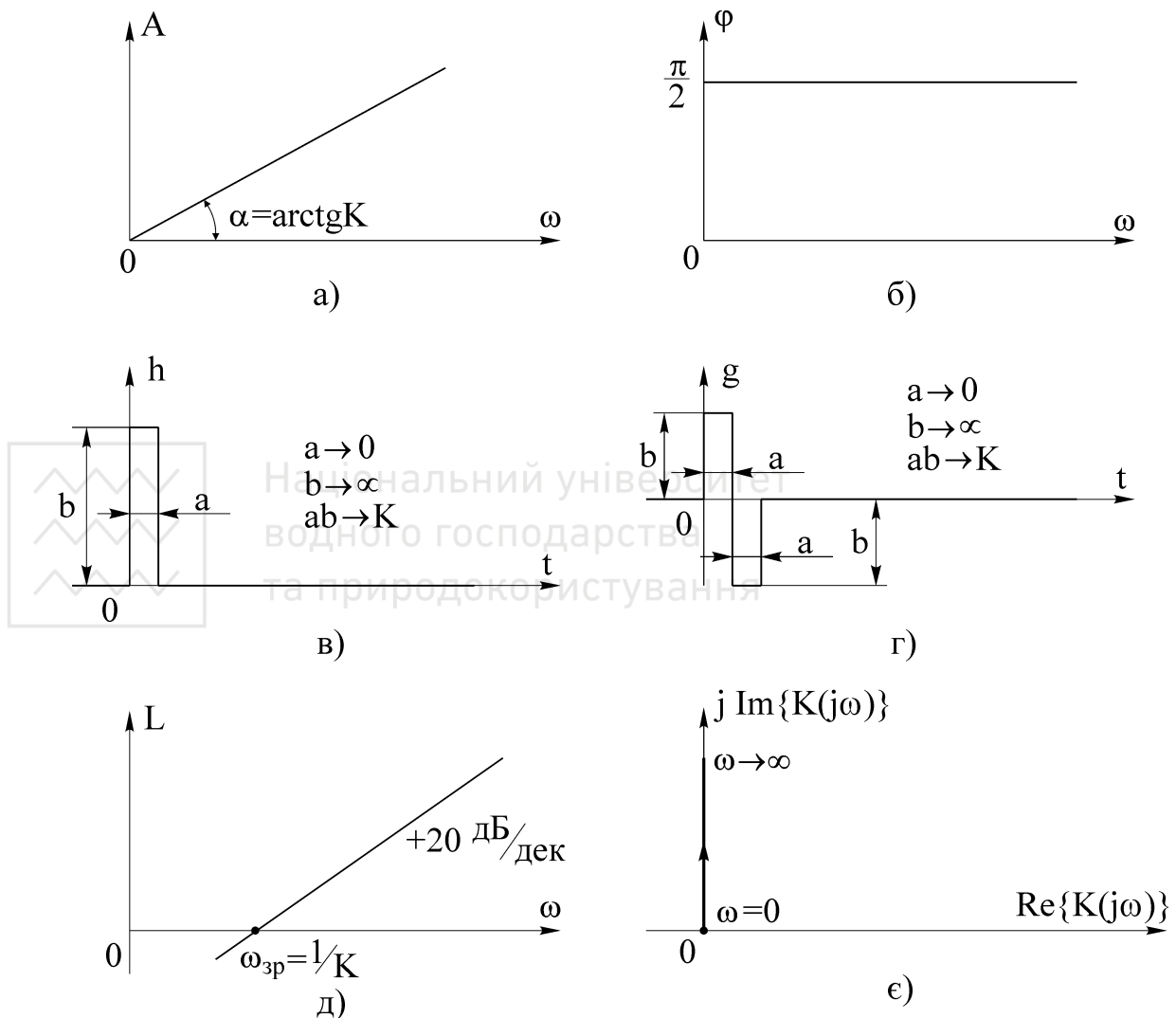


Рисунок 4.7 – Частотні та часові характеристики ідеального диференціувального кола

4.7 Інерційне диференціювальне коло

Реальні диференціювальні пристрої не є ідеальними диференціювальними колами, а належать до інерційних диференціювальних кіл, які описуються диференціальними рівняннями виду

$$\tau \frac{dU_{\text{вих}}(t)}{dt} + U_{\text{вих}}(t) = K \frac{dU_{\text{вх}}(t)}{dt}, \quad (4.34)$$

де τ – стала часу інерційного диференціювального кола.

Передаточна функція такого кола з (4.34) має вигляд

$$K(p) = \frac{Kp}{1 + p\tau}. \quad (4.35)$$

Прикладом інерційного диференціювального кола є диференціювальне RC – коло (рис.4.8), для якого

$$U_{\text{вих}}(p) = \frac{RCp}{1 + RCp} U_{\text{вх}}(p) = \frac{Kp}{1 + p\tau} U_{\text{вх}}(p),$$

де $K = \tau = RC$.

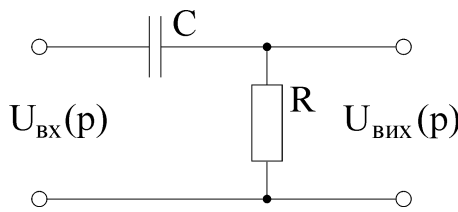


Рисунок 4.8 – Диференціювальне RC – коло

З (4.35) знаходимо співвідношення для АЧХ, ФЧХ та логарифмічної АЧХ інерційного диференціювального кола, які відповідно будуть мати такий вигляд:

$$A(\omega) = \frac{K\omega}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}; \quad (4.36)$$

$$\varphi(\omega) = 90^\circ - \arctan \omega\tau; \quad (4.37)$$

$$L(\omega) = 20 \lg(K\omega) - 20 \lg \sqrt{1 + \omega^2\tau^2}. \quad (4.38)$$

Перехідна характеристика інерційного диференціювального кола визначається таким співвідношенням:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} U_{\text{вх}}(p) K(p) e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{K}{1 + p\tau} e^{pt} dp = \frac{K}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (4.39)$$

а імпульсна характеристика – співвідношенням

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt} = -\frac{K}{\tau^2} e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (4.40)$$

На практиці тривалість перехідного процесу обмежують величиною $t_{\pi} = 3\tau$.

Графіки частотних та часових характеристик інерційного диференціального кола наведені на рис.4.9.

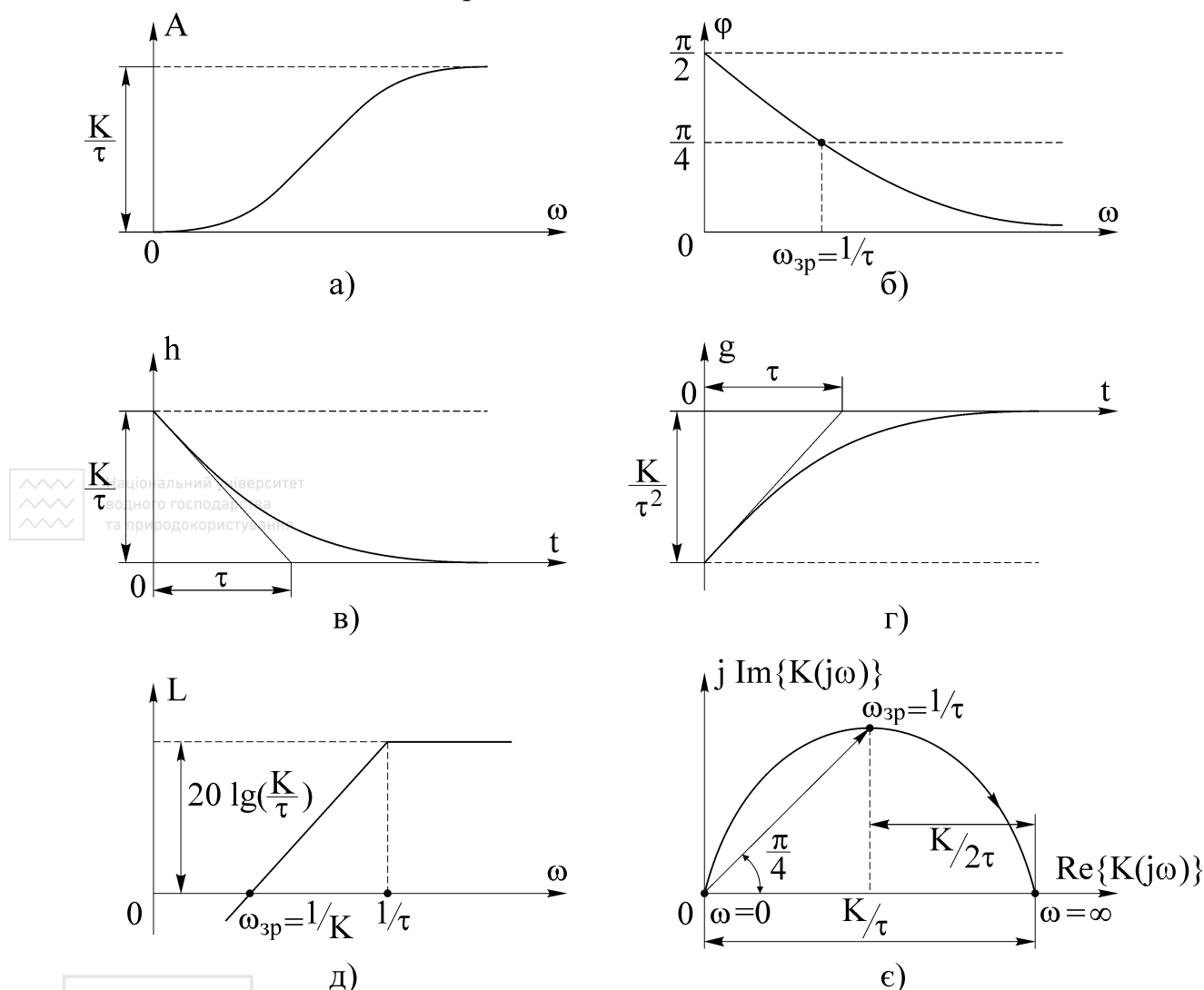


Рисунок 4.9 – Частотні та часові характеристики інерційного диференціального кола

4.8 Форсувальне коло

При розв'язанні задач корегування динамічних характеристик систем РА важливу роль відіграє форсувальне коло, диференціальне рівняння якого має вигляд

$$U_{\text{вих}}(t) = K\tau \frac{dU_{\text{вх}}(t)}{dt} + K U_{\text{вх}}(t), \quad (4.41)$$

а передаточна функція визначається як

$$K(p) = K(1 + p\tau). \quad (4.42)$$

У відповідності з (4.42) форсувальне коло можна вважати паралельним з'єднанням безінерційного та ідеального диференціального кіл. Співвідношення для АЧХ, ФЧХ та логарифмічної АЧХ форсувального кола мають такий вигляд:

$$A(\omega) = K\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}; \quad (4.43)$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \omega \tau; \quad (4.44)$$

$$L(\omega) = 20 \lg K + 20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}. \quad (4.45)$$

Перехідна та імпульсна характеристики форсувального кола визначаються таким співвідношеннями:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} U_{\text{вх}}(p) K(p) e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{K(1+p\tau)}{p} e^{pt} dp = K\tau \delta(t) + K1(t); \quad (4.46)$$

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt} = K\tau \frac{d\delta(t)}{dt} + K\delta(t). \quad (4.47)$$

Як і ідеальне диференціювальне коло, форсувальне коло може бути реалізовано лише наближено. Форсувальне коло входить до складу корегувальних кіл, а також до складу ізодромного кола.

Графіки частотних та часових характеристик форсувального кола наведені на рис.4.10.

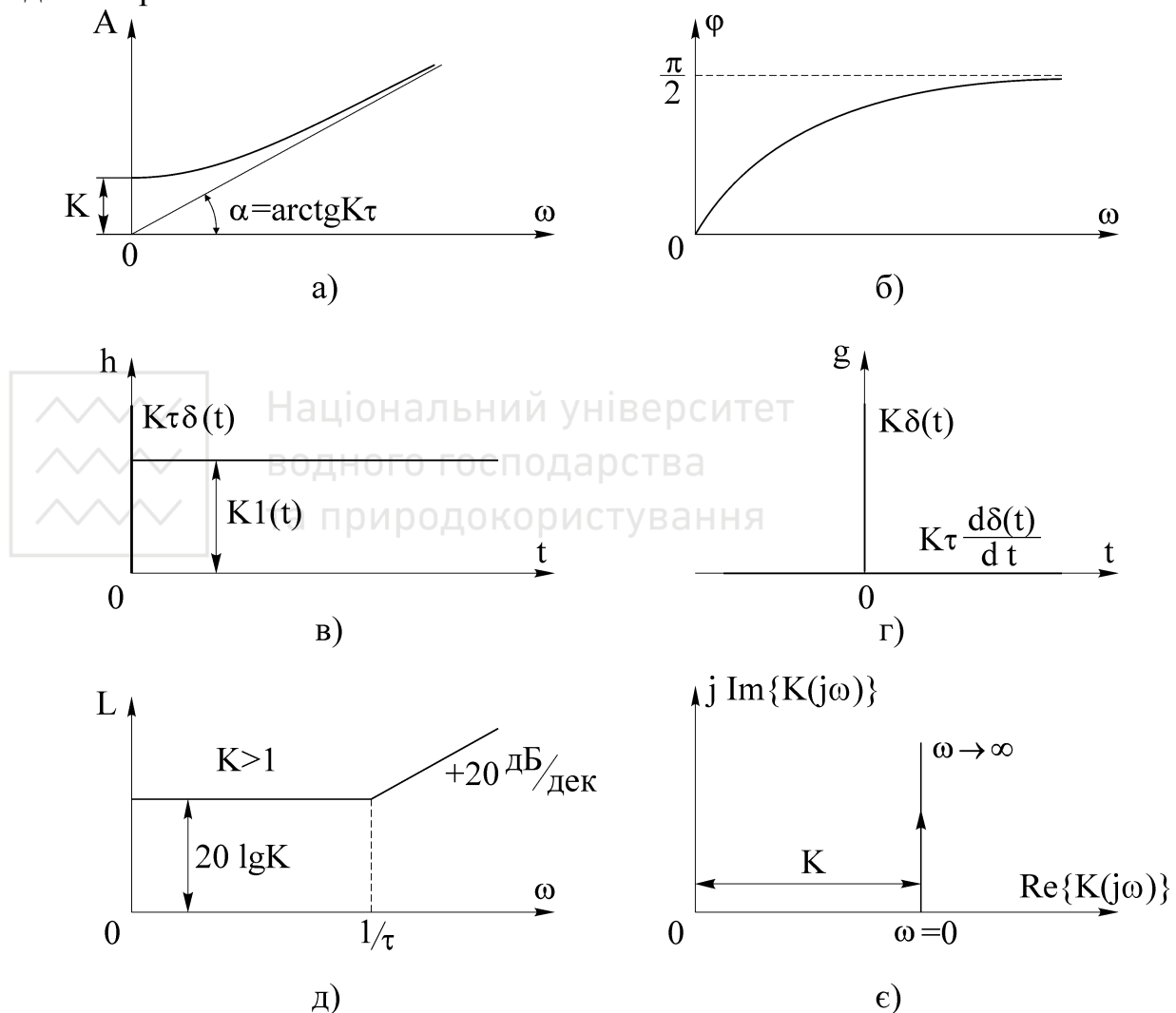


Рисунок 4.10 – Часові та частотні характеристики форсувального кола

4.9 Ідеальне інтегрувальне коло

Ідеальним інтегрувальним колом називають коло, вихідна напруга якого пропорційна інтегралу від вхідної напруги, тобто диференціальне рівняння такого кола має вигляд

$$\frac{dU_{\text{вих}}(t)}{dt} = K U_{\text{вх}}(t), \quad (4.48)$$

а передаточна функція визначається як

$$K(p) = \frac{U_{\text{вих}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)} = \frac{K}{p}. \quad (4.49)$$

Прикладом ідеального інтегрувального кола є виконавчий електродвигун системи стеження, кут повороту $\Theta(t)$ якого зв'язаний з частотою обертання $\Omega(t)$ рівнянням

$$\Theta(t) = K_{\text{дв}} \int_0^t \Omega(t) dt,$$

де $K_{\text{дв}}$ – коефіцієнт передачі електродвигуна.

З (4.49) отримаємо співвідношення для АЧХ, ФЧХ та логарифмічної АЧХ ідеального інтегрувального кола, які відповідно мають такий вигляд:

$$A(\omega) = \frac{K}{\omega}; \quad (4.50)$$

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}; \quad (4.51)$$

$$L(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg \omega. \quad (4.52)$$

Перехідна та імпульсна характеристики ідеального інтегрувального кола визначаються таким співвідношеннями:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} U_{\text{вх}}(p) K(p) e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{K}{p^2} e^{pt} dp = K t; \quad (4.53)$$

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt} = K. \quad (4.54)$$

Особливістю ідеального інтегрувального кола є його властивість запам'ятовувати, тобто утримувати останнє значення вихідного сигналу після зникнення вхідного сигналу. Цікавою властивістю такого кола є його здатність вносити постійне запізнення по фазі вихідного сигналу відносно вхідного на всіх частотах, яке дорівнює -90° .

Графіки частотних та часових характеристик ідеального інтегрувального кола наведені на рис.4.11.

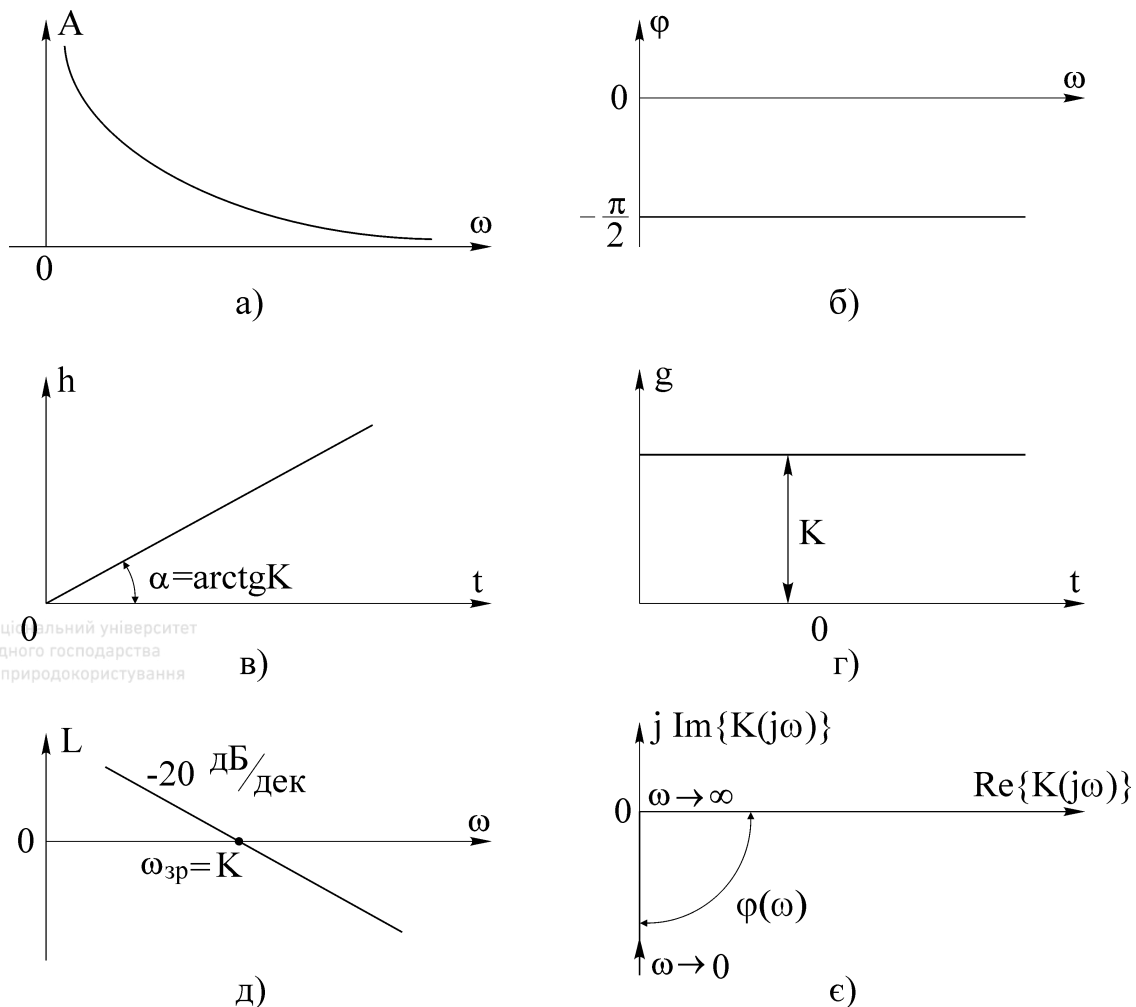


Рисунок 4.11 – Частотні та часові характеристики ідеального інтегрувального кола

4.10 Ізодромне коло

В системах РА часто використовується паралельне з'єднання ідеального інтегрувального та безінерційного кіл, тобто так зване ізодромне коло, яке описується диференціальним рівнянням

$$\frac{dU_{\text{вих}}(t)}{dt} = K\tau \frac{dU_{\text{вх}}(t)}{dt} + K U_{\text{вх}}(t) \quad (4.55)$$

та передаточною функцією

$$K(p) = \frac{K(1 + p\tau)}{p} \quad (4.56)$$

У відповідності з (4.56) ізодромне коло можна також розглядати як послідовне з'єднання ідеального інтегрувального та форсувального кіл. Включення ізодромних кіл до складу систем РА є одним з найважливіших способів підвищення якості цих систем.

З (4.56) отримаємо співвідношення для АЧХ, ФЧХ та логарифмічної АЧХ ізодромного кола, які відповідно мають такий вигляд:

$$A(\omega) = \frac{K}{\omega} \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}; \quad (4.57)$$

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} + \arctg \omega \tau; \quad (4.58)$$

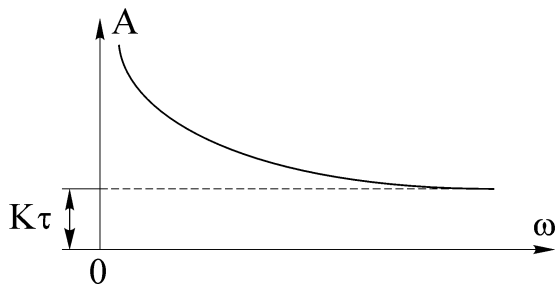
$$L(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg \omega + 20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}. \quad (4.59)$$

Перехідна та імпульсна характеристики ізодромного кола визначаються такими співвідношеннями:

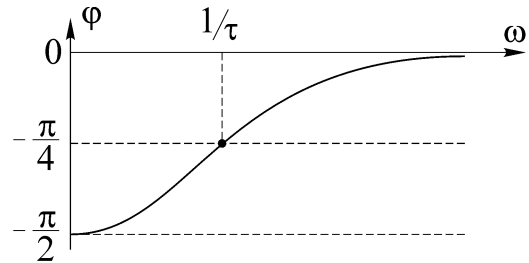
$$h(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} U_{\text{вх}}(p) K(p) e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{K(1+p\tau)}{p^2} e^{pt} dp = K t + K \tau l(t); \quad (4.60)$$

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt} = K l(t) + K \tau \delta(t). \quad (4.61)$$

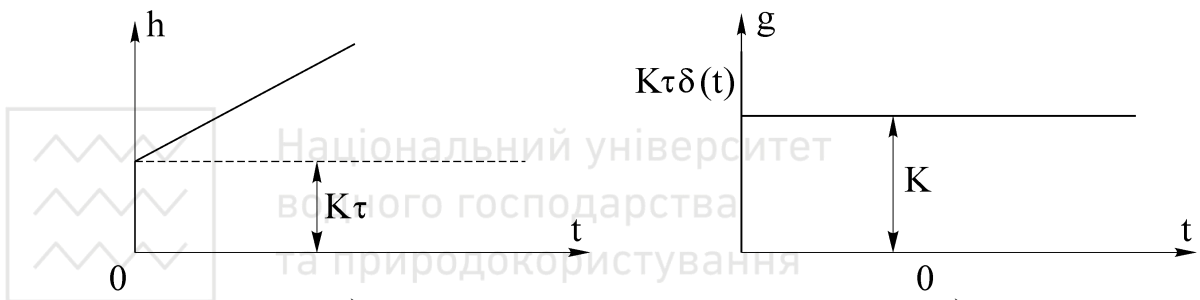
Графіки частотних та часових характеристик ізодромного кола наведені на рис.4.12.



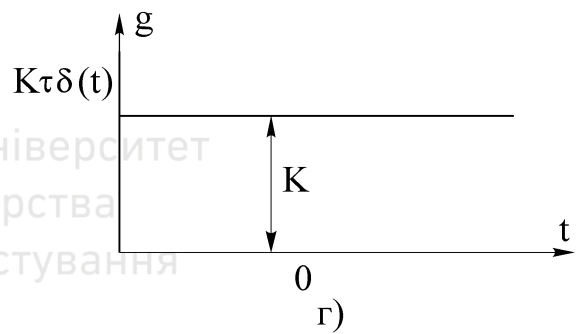
а)



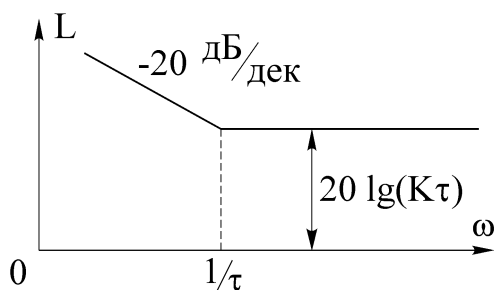
б)



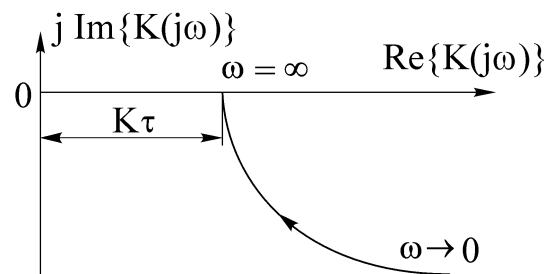
в)



г)



д)



е)

Рисунок 4.12 – Часові та частотні характеристики ізодромного кола

4.11 Інерційне інтегрувальне коло

В складі систем РА часто використовується коло, яке є результатом послідовного з'єднання ідеального інтегрувального та аперіодичного кіл, тобто так зване інерційне інтегрувальне коло, яке описується диференціальним рівнянням вигляду

$$\tau \frac{d^2 U_{\text{вих}}(t)}{dt^2} + \frac{dU_{\text{вих}}(t)}{dt} = K U_{\text{вх}}(t) \quad (4.62)$$

та передаточною функцією

$$K(p) = \frac{K}{p(1 + p\tau)}, \quad (4.63)$$

де K і τ – відповідно коефіцієнт передачі та стала часу кола.

Прикладом інерційного інтегрувального кола є виконавчий електродвигун, якщо в якості вихідного сигналу такого пристрою розглядати кут повороту $\Theta(t)$ вала, а в якості вхідного – напругу на обмотці управління $U_y(t)$:

$$K(p) = \frac{\Theta(p)}{U_y(p)} = \frac{\Theta(p)}{\Omega(p)} \cdot \frac{\Omega(p)}{U_y(p)} = \frac{K}{p(1 + p\tau_{\text{дв}})}.$$

З (4.63) отримаємо співвідношення для АЧХ, ФЧХ та логарифмічної АЧХ інерційного інтегрувального кола, які відповідно мають такий вигляд:

$$A(\omega) = \frac{K}{\omega \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}}; \quad (4.64)$$

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctg \omega \tau; \quad (4.65)$$

$$L(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg \omega - 20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}. \quad (4.66)$$

Перехідна та імпульсна характеристики інерційного інтегрувального кола визначаються такими співвідношеннями:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} U_{\text{вх}}(p) K(p) e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{K}{p^2(1 + p\tau)} e^{pt} dp = K t - K \tau \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right); \quad (4.67)$$

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt} = K \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right). \quad (4.68)$$

Графіки частотних та часових характеристик інерційного інтегрувального кола наведені на рис.4.13.

4.12 Коло з чистим запізненням

Коло з чистим запізненням – елементарне коло, передаточна функція якого не може бути описана дробово-раціональною функцією та має вигляд

$$K(p) = e^{-p\tau_3}, \quad (4.69)$$

а диференціальне рівняння записується як

$$U_{\text{вих}}(t) = U_{\text{вх}}(t - \tau_3), \quad (4.70)$$

де τ_3 – час запізнення вихідного сигналу відносно вхідного.

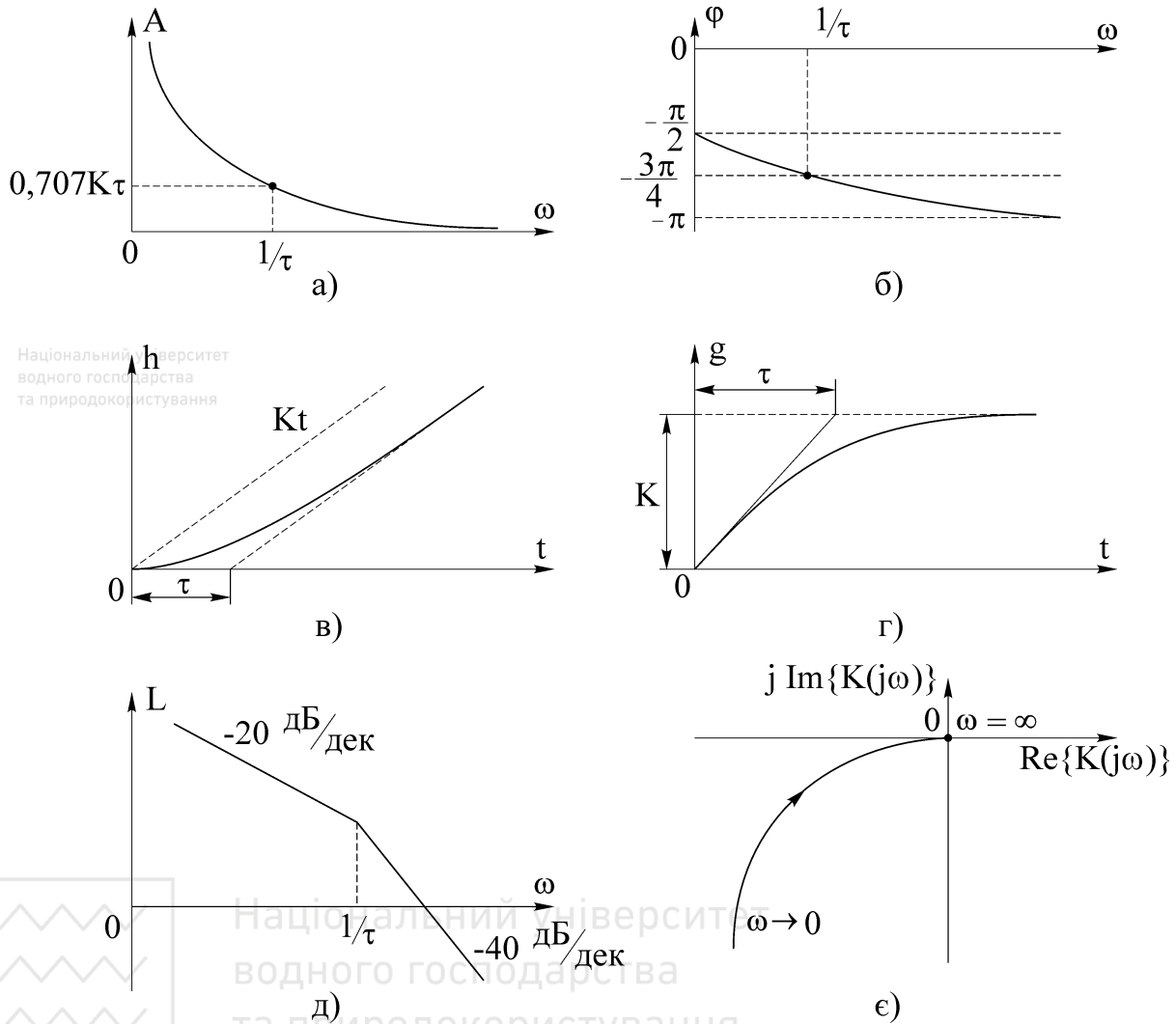


Рисунок 4.13 – Частотні та часові характеристики інерційного інтегрувального кола

Рівняннями типу (4.69) та (4.70) описуються лінії зв'язку без втрат (проводові, акустичні, радіорелейні), лінії затримки на LC – колах і т. і.

З (4.69) отримаємо співвідношення для АЧХ, ФЧХ та логарифмічної АЧХ кола з чистим запізненням, які відповідно мають такий вигляд:

$$A(\omega) = 1; \quad (4.71)$$

$$\varphi(\omega) = -\omega\tau_3; \quad (4.72)$$

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 0. \quad (4.73)$$

Перехідна та імпульсна характеристики кола з чистим запізненням визначаються такими співвідношеннями:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} U_{BX}(p)K(p)e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{e^{-p\tau_3}}{p} e^{pt} dp = 1(t - \tau_3); \quad (4.74)$$

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt} = \delta(t - \tau_3). \quad (4.75)$$

Графіки частотних та часових характеристик кола з чистим запізненням наведені на рис.4.14.

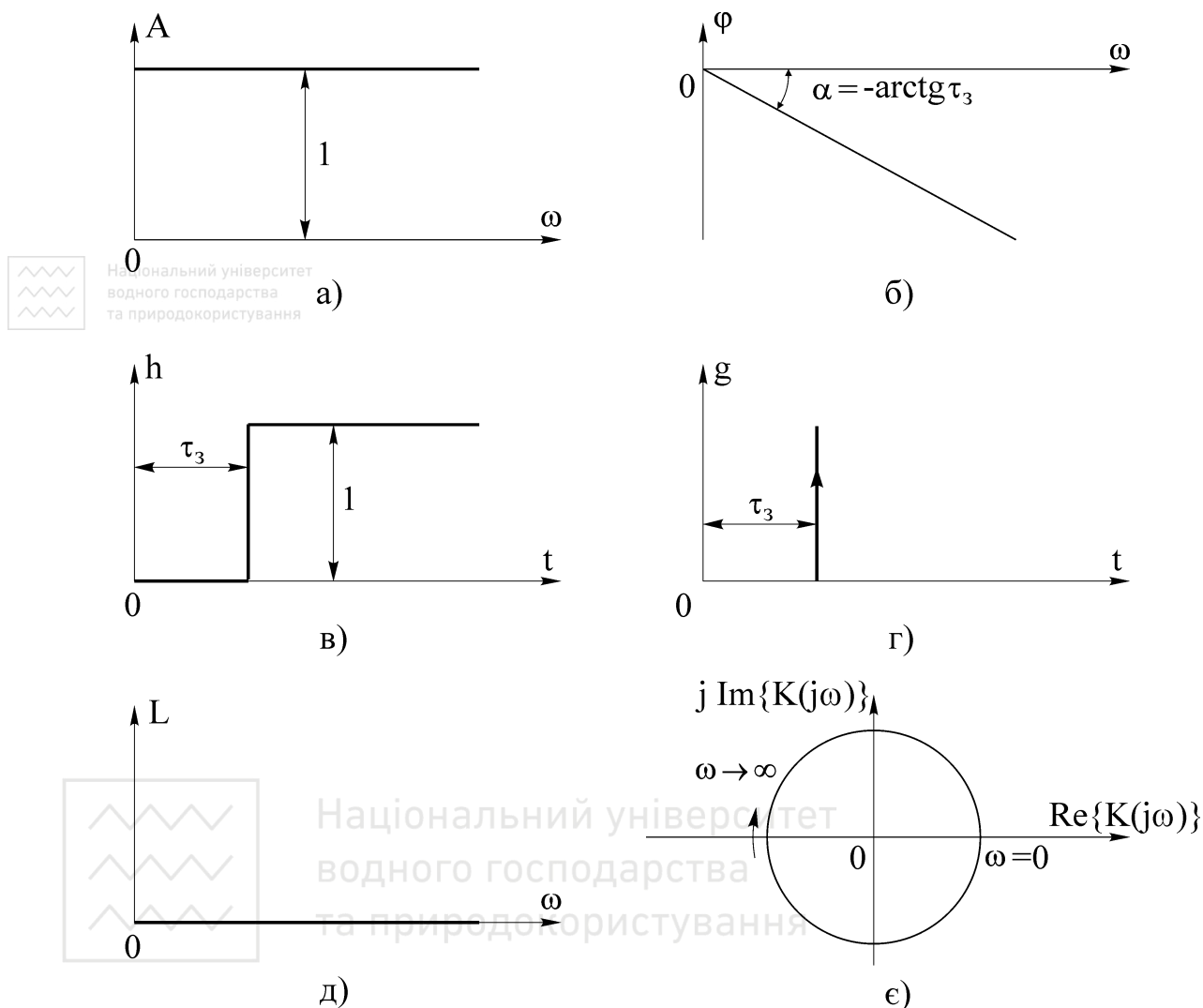


Рисунок 4.14 – Частотні та часові характеристики кола з чистим запізненням

4.13 Немінімальнофазові кола

Разом з розглянутими елементарними динамічними колами мінімальнофазового типу в системах РА використовуються елементи або об'єкти управління, математичні моделі яких являють собою немінімальнофазові кола, до яких відносяться нестійкі кола з перехідною характеристикою, яка розходиться. Поліноми знаменника передаточної функції таких кіл мають хоча б один корінь з позитивною реальною частиною.

Прикладом такого кола може бути асинхронний електродвигун, який працює при коефіцієнтах ковзання, більших критичного, та має передаточну функцію вигляду

$$K(p) = \frac{K}{p\tau - 1},$$

що теоретично відповідає необмеженому збільшенню відхилення вихідного сигналу при подачі на вхід одиничної функції включення. Аналогічні Властивості мають немінімальнофазові кола другого порядку з передаточними функціями вигляду

$$K(p) = \frac{K}{\tau^2 p^2 + 2\alpha\tau p - 1}; \quad K(p) = \frac{K}{\tau^2 p^2 - 2\alpha\tau p - 1};$$

$$K(p) = \frac{K}{\tau^2 p^2 - 2\alpha\tau p + 1}.$$



Національний університет
водного господарства
та природокористування

До немінімальнофазових відносять також кола з передаточними функціями вигляду

$$K(p) = K(p\tau - 1); \quad K(p) = K(\tau^2 p^2 - 2\alpha\tau p - 1);$$

$$K(p) = K(p^2\tau^2 + 2\alpha\tau p - 1); \quad K(p) = K(\tau^2 p^2 - 2\alpha\tau p + 1).$$

поліноми чисельника яких мають хоча б один корінь з позитивною реальною частиною.

Назва немінімальнофазових кіл пояснюється їх властивістю утворювати більший від'ємний або додатний фазовий зсув вихідного сигналу відносно вхідного в порівнянні з мінімальнофазовими колами з такими самими АЧХ.

Приклад 4.2. Розглянемо структурну схему системи, наведеної на рис.4.15, а. Для того, щоб розділити коло прямої передачі та коло зворотного зв'язку на типові динамічні кола, необхідно провести аналіз, в результаті якого отримаємо, що коло прямої передачі складається з аперіодичного кола другого порядку з передаточною функцією

$K_1(p) = \frac{K_1}{(1 + p\tau_1)(1 + p\tau_2)}$, форсувального кола з передаточною

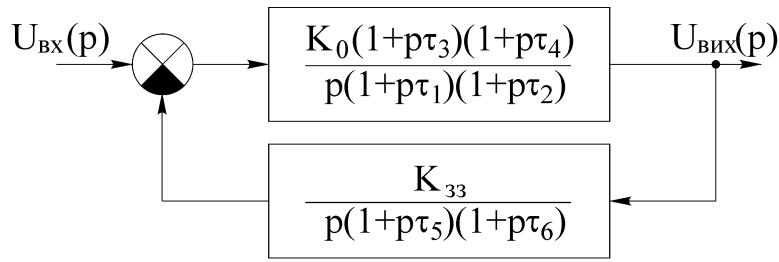
функцією $K_2(p) = K_2(1 + p\tau_3)$, та ізодромного кола з передаточною функцією

$K_3(p) = \frac{K_3(1 + p\tau_4)}{p}$, а коло зворотного зв'язку – з аперіодичного кола першого по-

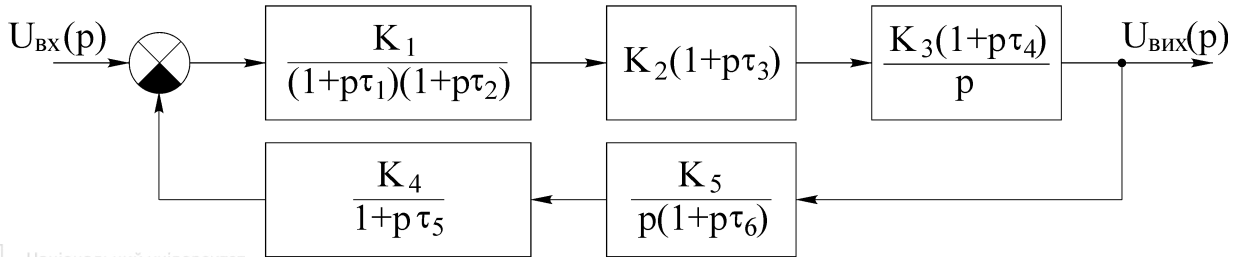
рядку з передаточною функцією $K_4(p) = \frac{K_4}{1 + p\tau_5}$ та інерційного інтегрувального

кола з передаточною функцією $K_5(p) = \frac{K_5}{p(1 + p\tau_6)}$, при цьому $K_0 = K_1 K_2 K_3$, а

$K_{33} = K_4 K_5$ (див. рис.4.15, б).



а)



б)

Рисунок 4.15 – Структурна схема системи радіоавтоматики до ділення на типові динамічні кола (а) і після цього (б)

Приклад 4.3. Знайдемо та побудуємо частотні і часові характеристики електричного кола, яке описується диференціальним рівнянням

$$\tau_2 \frac{dU_{\text{ВИХ}}(t)}{dt} + U_{\text{ВИХ}}(t) = K\tau_1 \frac{dU_{\text{ВХ}}(t)}{dt}.$$

Передаточна функція такого електричного кола запишеться як

$$K(p) = \frac{K p \tau_1}{1 + p \tau_2},$$

а частотні та часові характеристики визначаються такими співвідношеннями:

$$A(\omega) = \frac{K\omega\tau_1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau_2^2}};$$

$$\varphi(\omega) = 90^\circ - \arctg \omega\tau_2;$$

$$L(\omega) = 20 \lg(K\omega\tau_1) - 20 \lg \sqrt{1 + \omega^2\tau_2^2};$$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{K\tau_1}{1 + p\tau_2} e^{pt} dp = \frac{K\tau_1}{\tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}};$$

$$g(t) = -\frac{K\tau_1}{\tau_2^2} e^{-\frac{t}{\tau_2}}.$$

Графіки частотних та часових характеристик такого електричного кола наведені на рис.4.16.

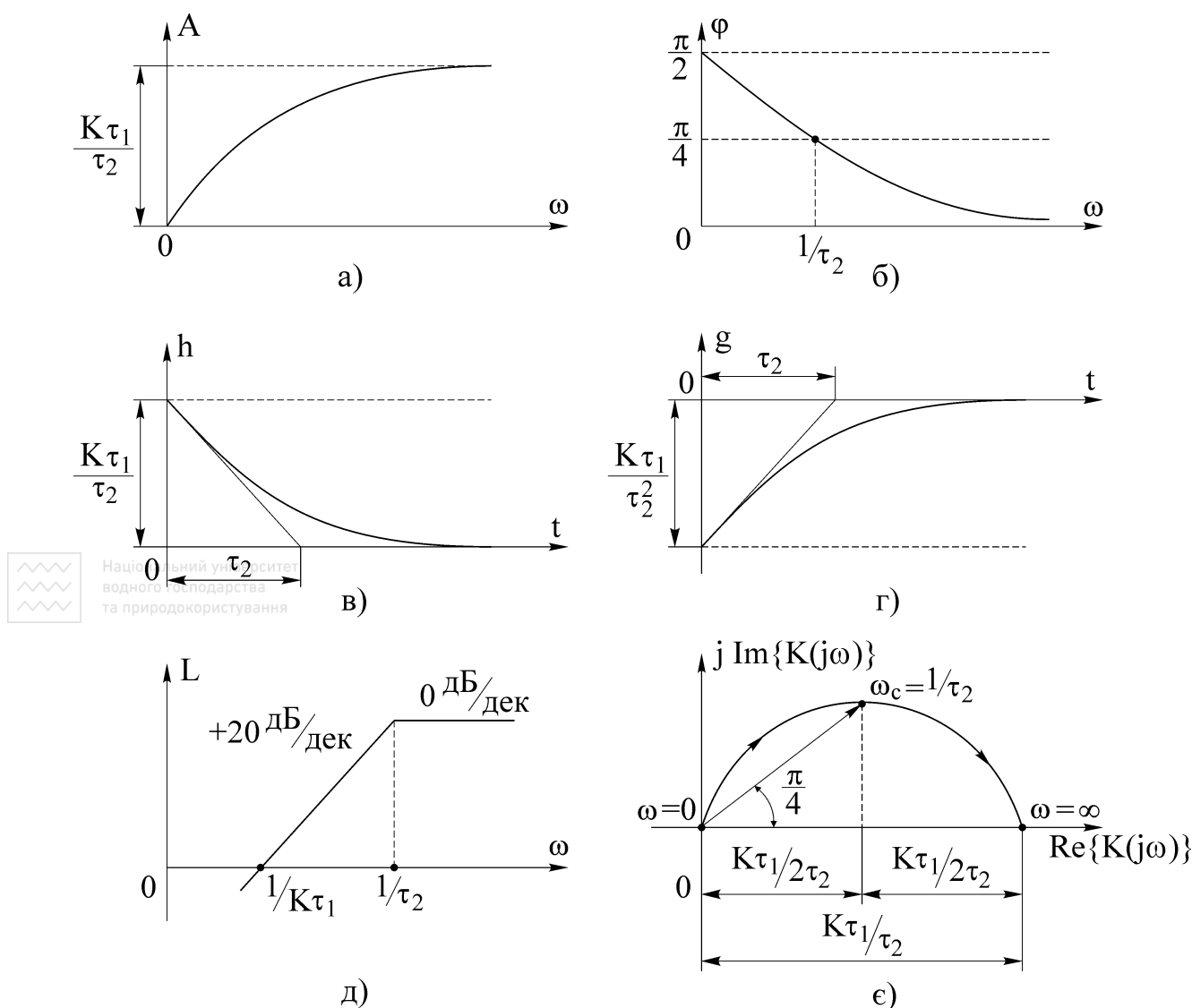


Рисунок 4.16 – Частотні та часові характеристики електричного кола з прикладу 4.3

Контрольні запитання

1. Що таке типове динамічне коло і якою передаточною функцією воно описується?
2. Назвіть основні види типових динамічних кіл лінійних систем РА.
3. Наведіть основні характеристики аперіодичного кола першого порядку.
4. Що таке безінерційне коло і якими характеристиками воно описується?
5. Наведіть частотні характеристики коливального кола.
6. В чому полягає відміна часових характеристик консервативного кола від часових характеристик коливального кола?
7. В чому полягає відміна частотних характеристик аперіодичного кола другого порядку від частотних характеристик коливального кола?
8. Наведіть основні характеристики ідеального диференціювального кола.
9. Чим відрізняються годографи ідеального та інерційного диференціювального кіл?

10. За рахунок чого форсувальне коло при збільшенні частоти вносить позитивний фазовий зсув?

11. Порівняйте основні характеристики ідеального та інерційного інтегральних кіл.

12. Наведіть основні характеристики ізодромного кола.

13. Назвіть особливості частотних та часових характеристик кола з чистим запізненням.

14. Які кола відносять до мінімальнофазових?

5 МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ ЛІНІЙНИХ АНАЛОГОВИХ СИСТЕМ РАДІОАВТОМАТИКИ



Національний університет
водного господарства
та природокористування

5.1 Поняття стійкості та її різновиди

Стійкість характеризує властивість системи РА реагувати на збуджувальні дії, які, як правило, зводяться до двох найбільш поширених типових дій – функції включення (функції Хевісайда) $1(t)$ та δ – функції (функції Дірака) $\delta(t)$. Саме тому дослідження стійкості зводиться до знаходження відгуку системи на ці дії. Під стійкістю будемо розуміти властивість системи повертатися у вихідний стан після закінчення збуджуючої дії, яка вивела її з стану рівноваги.

На рис.5.1 наведені ілюстрації, які пояснюють поняття стійкості. Так, рис.5.1, а характеризує абсолютно стійкий стан системи, тобто при закінченні збуджуючої дії, яка вивела систему з стану рівноваги, вона повертається у вихідне положення. Рис.5.1, б ілюструє систему, що знаходиться в нейтральному стані, тобто будь-яка, навіть досить мала, збуджувальна дія призводить до зміни стану системи. Рис.5.1, в характеризує умовно стійкий стан системи, тобто при деяких значеннях збуджувальних дій система повертається у вихідне положення, зберігаючи стійкість, а при більших значеннях збуджувальних дій відбувається втрата стійкості. На рис.5.1, г наведена ілюстрація, яка характеризує нестійкий стан системи, тобто будь-яка збуджувальна дія переводить систему до невірноваженого (нестійкого) стану.

Таким чином, існує абсолютна стійкість (у великому) та стійкість в малому, нестійкий стан та межа між стійким та нестійким станами. Межа буває асимптотичною та коливальною.

Особливо треба відзначити, що для лінійних аналогових систем РА умови стійкості залежать тільки від співвідношення параметрів системи (коефіцієнтів передачі та сталих часу) та, на відміну від нелінійних аналогових систем РА, не залежить від амплітуди вхідного сигналу.

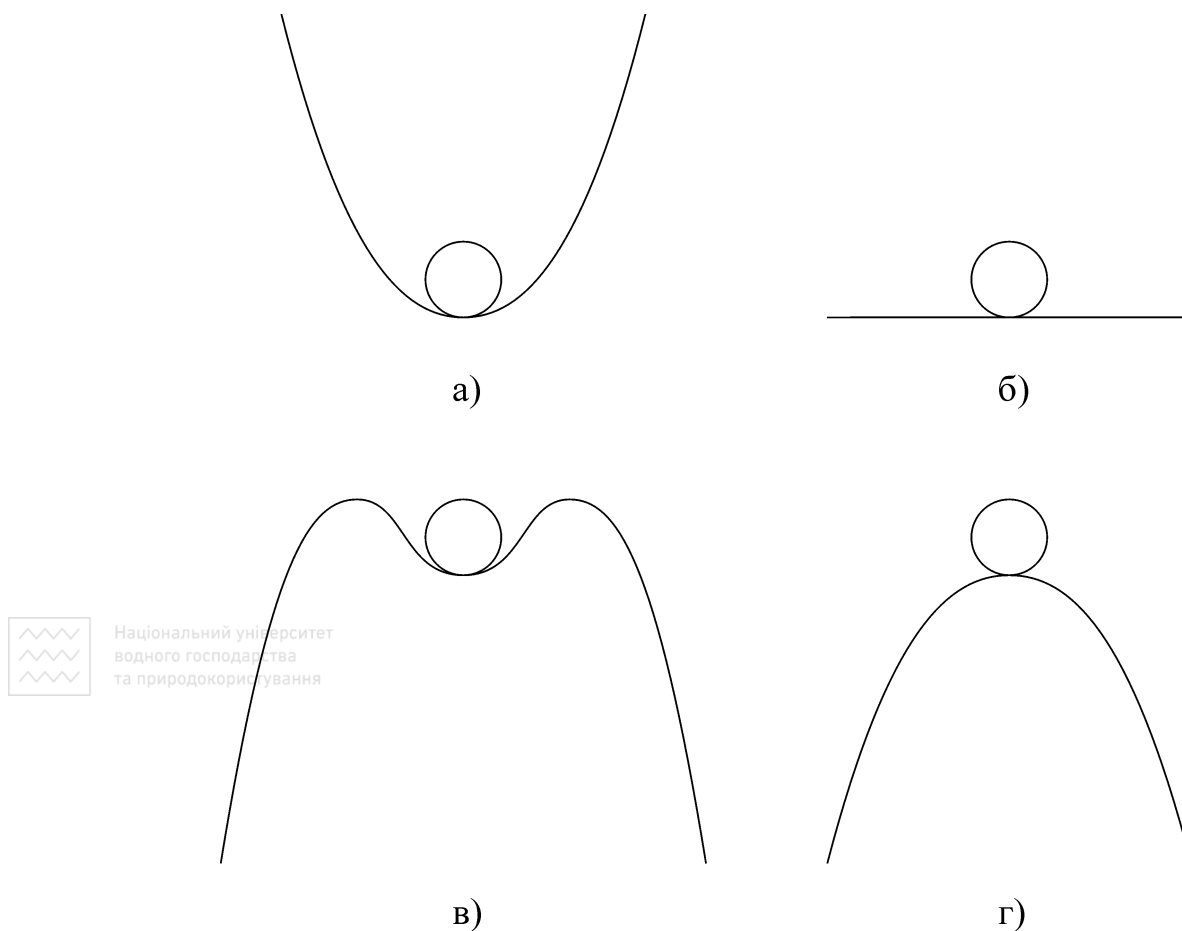


Рисунок 5.1 – До визначення стійкості: а – абсолютно стійкий стан; б – нейтральний стан; в – умовно стійкий стан; г – нестійкий стан

5.2 Необхідні та достатні умови стійкості

Умови стійкості для систем РА оцінюються за властивостями перехідних процесів. Для оцінки стійкості необхідно визначити перехідну $h(t)$ та імпульсну $g(t)$ характеристики системи.

Будемо вважати, що процеси в досліджуваній системі РА описуються диференціальним рівнянням вигляду

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{dY^k(t)}{dt^k} = \sum_{i=0}^M b_i \frac{d^i X(t)}{dt^i}. \quad (5.1)$$

Рішення рівняння (6.1) складається з двох складових:

$$Y(t) = Y_B(t) + Y_{\Pi}(t), \quad (5.2)$$

де $Y_B(t)$ – вільна складова вихідного сигналу системи (загальне рішення однорідного рівняння); $Y_{\Pi}(t)$ – примусова складова вихідного сигналу системи (частинне рішення неоднорідного рівняння).

Система РА буде стійкою, якщо вільна складова $Y_B(t)$ прямує до нуля. Це означає, що якщо система виведена з стану рівноваги будь-яким збуджен-

ням, то вона повертається у вихідний стан після закінчення дії цього збудження. Таким чином, необхідну та достатню умову стійкості можна записати у вигляді

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Y_B(t) \rightarrow 0 \text{ або } \leq \varepsilon, \quad (5.3)$$

де ε – деяке досить мале число.

Вільна складова розв'язку рівняння (6.1) залежить від коренів характеристичного рівняння, отриманого при заміні $\frac{d^k}{dt^k} = p^k$, тобто

$$a_N p^N + a_{N-1} p^{N-1} + \dots + a_k p^k + \dots + a_1 p + a_0 = 0. \quad (5.4)$$

Вирішивши останнє рівняння, отримаємо

$$Y_B(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t}, \quad (5.5)$$

де λ_i – корені характеристичного рівняння (5.4) або полюси системи РА; C_i – сталі інтегрування.

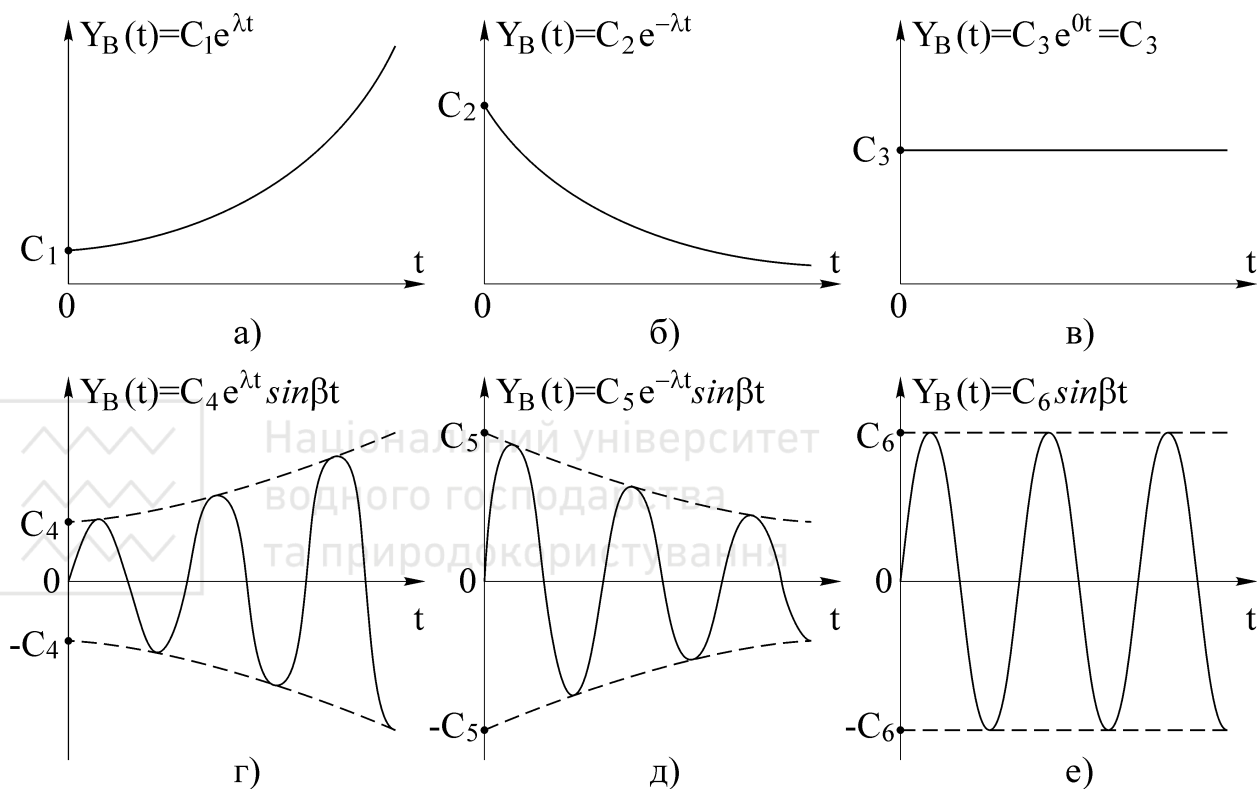


Рисунок 5.2 – До пояснення стійкості системи РА: а, б – вільні складові для дійсних коренів; в – нульового кореня; г, д – пари комплексно–спряжених коренів; е – пари уявних коренів

Дійсному кореню характеристичного рівняння λ_i в співвідношенні (5.5) відповідає складова $Y_{B,i}(t) = C_i e^{\lambda_i t}$. Якщо $\lambda_i > 0$, то вільна складова при збільшенні часу необмежено збільшується (рис.5.2, а), а при $\lambda_i < 0$ ця скла-

дова прямує до нуля (рис.5.2, б). Нульовому кореню характеристичного рівняння ($\lambda_i = 0$) відповідає пряма лінія на рівні C_3 (див. рис.5.2, в).

Парі комплексно-спряжених коренів характеристичного рівняння (5.4) відповідає складова

$$Y_{B,i}(t) = C_i e^{\lambda_i t} \sin \beta_i t, \quad (5.6)$$

де $\lambda_i \pm j\beta_i$ – корені характеристичного рівняння.

При цьому при $\lambda_i > 0$ амплітуда коливань вільної складової необмежено збільшується (рис.5.2, г), або прямує до нуля, якщо дійсні частини коренів від’ємні (рис.5.2, д).

Пара уявних коренів характеристичного рівняння дозволяє отримати вільну складову у вигляді гармонічного коливання з сталою амплітудою (рис.5.2, є):

$$Y_{B,i}(t) = C_i \sin \beta_i t.$$

З розглянутого вище можна сформулювати другу умову, що накладається на властивості коренів характеристичного рівняння. Таким чином, для стійкості системи РА необхідно та достатньо, щоб всі корені характеристичного рівняння мали від’ємні знаки, або ці корені на площині комплексного змінного були розташовані ліворуч від уявної осі. Тільки в цьому випадку всі складові в співвідношенні (5.5) будуть прямувати до нуля.

Якщо корені характеристичного рівняння розташовані на уявній осі, то система РА знаходиться на межі стійкості, тобто працює в граничному режимі. При цьому можливі два випадки: корінь на початку координат та пара уявних коренів. Нульовий корінь з’являється тоді, коли вільний член характеристичного рівняння (a_0) дорівнює нулю. Якщо інші корені цього рівняння від’ємні, то система РА буде стійкою не відносно вихідного сигналу, а відносно його похідної, а вихідний сигнал в усталеному режимі має довільне значення. Такі системи носять назву нейтрально (умовно) стійких. В тому випадку, коли характеристичне рівняння має пару уявних коренів, межу стійкості називають коливальною.

В більшості практичних випадків корені характеристичного рівняння системи обчислити неможливо, тому були розроблені правила (критерії), які дозволяють робити висновок про розташування коренів на площині комплексного змінного без їх розрахунку. Однак перед тим, як користуватися тим або іншим критерієм для оцінки стійкості, слід перевірити виконання необхідної умови стійкості, у відповідності з якою всі коефіцієнти характеристичного рівняння (5.4) повинні бути більші нуля. Для доведення цього положення представимо рівняння (5.4) у вигляді

$$a_N \prod_{i=1}^N (p - \lambda_i) = 0. \quad (5.7)$$

Якщо система стійка, тобто всі корені λ_i від'ємні, то, розкривши скобки в співвідношенні (5.7), отримаємо рівняння з позитивними коефіцієнтами. Якщо система нестійка, тобто хоча б один з коренів позитивний, то отримаємо рівняння з декількома від'ємними коефіцієнтами. В подальшому будемо вважати, що необхідна умова стійкості виконується.

5.3 Алгебраїчні критерії стійкості

Алгебраїчні критерії стійкості засновані на обробці за деяким алгоритмом коефіцієнтів характеристичного рівняння a_k . Найбільш простим є алгебраїчний критерій стійкості для характеристичних рівнянь першого та другого порядку, відповідно $a_1 p + a_0 = 0$ та $a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0$. Для таких характеристичних рівнянь, тобто при $N = 1$ та $N = 2$, необхідною та достатньою умовою стійкості є позитивність всіх коефіцієнтів характеристичного рівняння, тобто $a_k > 0$.

Для характеристичних рівнянь третього порядку ($N = 3$) вигляду $a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0$ використовується критерій Вишнеградського

$$a_1 a_2 > a_0 a_3, \quad a_k > 0. \quad (5.8)$$

Для оцінки стійкості систем РА, які мають характеристичні рівняння четвертого порядку та вище ($N \geq 4$) використовується алгебраїчний критерій Гурвіца. Цей критерій є матричним, в основі якого лежить матриця Гурвіца

$$\begin{vmatrix} a_{N-1} & a_{N-3} & a_{N-5} & \dots & 0 \\ a_N & a_{N-2} & a_{N-4} & \dots & 0 \\ 0 & a_{N-1} & a_{N-3} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & a_0 \end{vmatrix}. \quad (5.9)$$

Порядок складання матриці Гурвіца такий. В лівому верхньому кутку матриці записують коефіцієнт a_{N-1} , по головній діагоналі розташовуються коефіцієнти характеристичного рівняння з молодшими індексами, над елементами головної діагоналі записуються коефіцієнти з меншими індексами, під елементами головної діагоналі – з більшими.

Для оцінки стійкості системи РА необхідно обчислити визначники Гурвіца, які отримують з матриці (5.9) шляхом відкидання рівної кількості рядків та стовпців в лівому верхньому кутку матриці. Наприклад, перший визначник

$$\Delta_1 = a_{N-1};$$

другий

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{N-1} & a_{N-3} \\ a_N & a_{N-2} \end{vmatrix};$$

третій

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{N-1} & a_{N-3} & a_{N-5} \\ a_N & a_{N-2} & a_{N-4} \\ 0 & a_{N-1} & a_{N-3} \end{vmatrix}.$$

Система РА буде стійкою, якщо при $a_N > 0$

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 > 0, \quad \dots, \quad \Delta_N > 0. \quad (5.10)$$

Розкривши Δ_N за останнім стовпцем, отримаємо

$$\Delta_N = a_0 \Delta_{N-1}. \quad (5.11)$$

Тому що $a_0 > 0$, то для перевірки стійкості системи достатньо з'ясувати знаки тільки до Δ_{N-1} визначника.

Якщо визначник Δ_N дорівнює нулю, то система РА знаходиться на межі стійкості. Можливими є два випадки:

- 1) вільний член характеристичного рівняння a_0 дорівнює нулю, що відповідає нейтрально стійкій системі;
- 2) визначник Δ_{N-1} дорівнює нулю, що відповідає коливальній межі стійкості.

З умови $\Delta_{N-1} = 0$ можна визначити параметри, при яких система РА знаходиться на межі стійкості. Наприклад, можна обчислити критичний коефіцієнт підсилення $K_{кр}$, який відповідає межі стійкості. Відношення

$$\alpha = \frac{K_{кр}}{K} \quad (5.12)$$

носить назву запасу стійкості за підсиленням. Для нормального функціонування системи РА необхідно, щоб $\alpha \geq 2$.

Приклад 5.1. Знайти умови стійкості замкненої системи РА з одиничним від'ємним зворотним зв'язком, передаточна функція якої в розімкненому стані має вигляд

$$K_{роз}(p) = \frac{K(1 + p\tau_1)}{p^2(1 + p\tau_2)(1 + p\tau_3)}.$$

Спочатку знайдемо передаточну функцію замкненої системи РА

$$K_{зам}(p) = \frac{K_{роз}(p)}{1 + K_{роз}(p)} = \frac{K(1 + p\tau_1)}{p^2(1 + p\tau_2)(1 + p\tau_3) + K(1 + p\tau_1)}.$$

Характеристичне рівняння такої системи РА має вигляд

$$p^2(1+p\tau_2)(1+p\tau_3)+K(1+p\tau_1)=\tau_2\tau_3p^4+(\tau_2+\tau_3)p^3+p^2+K\tau_1p+K=0.$$

Матрицю Гурвіца можна записати таким чином:

$$\begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tau_2 + \tau_3 & K\tau_1 & 0 & 0 \\ \tau_2\tau_3 & 1 & K & 0 \\ 0 & \tau_2 + \tau_3 & K\tau_1 & 0 \\ 0 & \tau_2\tau_3 & 1 & K \end{vmatrix}.$$

У відповідності з співвідношенням (5.10) умови стійкості можна записати таким чином:

$$1) a_N = a_4 = \tau_2\tau_3 > 0;$$

$$2) \Delta_1 = a_{N-1} = a_3 = \tau_2 + \tau_3 > 0;$$

$$3) \Delta_2 = a_{N-1}a_{N-2} - a_Na_{N-3} = a_3a_2 - a_4a_1 = \tau_2 + \tau_3 - K\tau_1\tau_2\tau_3 > 0;$$

$$\begin{aligned} 4) \Delta_3 &= a_{N-1}a_{N-2}a_{N-3} - a_{N-4}a_{N-1}^2 - a_Na_{N-3}^2 = a_3a_2a_1 - a_0a_3^2 - a_4a_1^2 = \\ &= K\tau_1(\tau_2 + \tau_3) - K(\tau_2 + \tau_3)^2 - K^2\tau_1^2\tau_2\tau_3 = \\ &= K\{(\tau_2 + \tau_3)(\tau_1 - \tau_2 - \tau_3) - K\tau_1^2\tau_2\tau_3\} > 0. \end{aligned}$$

Перші дві умови виконуються при будь-яких значеннях параметрів системи, а останні дві для наступних випадків:

$$\begin{aligned} K &< \frac{\tau_2 + \tau_3}{\tau_1\tau_2\tau_3} = \frac{1}{\tau_1} \cdot \frac{\tau_2 + \tau_3}{\tau_2\tau_3} = \frac{1}{\tau_1} \cdot \left(\frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{\tau_3} \right); \\ K &< \frac{(\tau_2 + \tau_3)(\tau_1 - \tau_2 - \tau_3)}{\tau_1^2\tau_2\tau_3} = \frac{1}{\tau_1} \cdot \frac{\tau_2 + \tau_3}{\tau_2\tau_3} \cdot \frac{\tau_1 - \tau_2 - \tau_3}{\tau_1} = \frac{1}{\tau_1} \cdot \left(\frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{\tau_3} \right) \cdot \frac{\tau_1 - \tau_2 - \tau_3}{\tau_1}. \end{aligned}$$

З останніх двох нерівностей більш критичною є друга нерівність, тому що множник $\frac{\tau_1 - \tau_2 - \tau_3}{\tau_1}$ завжди менше одиниці. Тому умова стійкості для розглянутої системи РА запишеться у вигляді

$$K < K_{кр} = \frac{(\tau_2 + \tau_3)(\tau_1 - \tau_2 - \tau_3)}{\tau_1^2\tau_2\tau_3}.$$

Разом з послідовністю перетворень, характерних для обчислення визначника Гурвіца, використовують мнемонічне правило, пов'язане зі складанням таблиці Рауса. В перший рядок цієї таблиці вписують всі елементи характеристичного рівняння (5.4) з парними індексами (коефіцієнт $a_N = 1$), в другий рядок – всі елементи з непарними індексами. Третій рядок складають за формулою обчислення визначників другого порядку та діленням отриманого результату на a_{N-1} . При формуванні четвертого рядка ті самі дії виконують над елементами другого та третього рядків і т. і.

Таблиця 5.1 – Таблиця Рауса

Номер рядка	Номер стовпця			
	1	2	3	4
1	1	a_{N-2}	a_{N-4}	...
2	a_{N-1}	a_{N-3}	a_{N-5}	...
3	$c_{31} = \frac{a_{N-1}a_{N-2} - a_{N-3}}{a_{N-1}}$	$c_{32} = \frac{a_{N-1}a_{N-4} - a_{N-5}}{a_{N-1}}$	$c_{33} = \frac{a_{N-1}a_{N-6} - a_{N-7}}{a_{N-1}}$...
4	$c_{41} = \frac{c_{31}a_{N-3} - c_{32}a_{N-1}}{c_{31}}$	$c_{42} = \frac{c_{31}a_{N-5} - c_{33}a_{N-1}}{c_{31}}$	$c_{43} = \frac{c_{31}a_{N-7} - c_{34}a_{N-1}}{c_{31}}$...
5	$c_{51} = \frac{c_{41}c_{32} - c_{31}c_{42}}{c_{41}}$	$c_{52} = \frac{c_{41}c_{33} - c_{31}c_{43}}{c_{41}}$	$c_{53} = \frac{c_{41}c_{34} - c_{31}c_{44}}{c_{41}}$...
6

Елемент $c_{k\ell}$ таблиці Рауса можна обчислити за допомогою формули

$$c_{k\ell} = \frac{c_{1,\ell-1}c_{k+1,\ell-2} - c_{1,\ell-2}c_{k+1,\ell-1}}{c_{1,\ell-1}}.$$

Критерій Рауса формулюється таким чином: для того, щоб система РА була стійкою, необхідно та достатньо, щоб всі елементи першого стовпця були позитивними, тобто $a_{N-1} > 0$, $c_{31} > 0$, $c_{41} > 0$, ...

Перевіримо, наприклад, стійкість системи РА, яка має характеристичне рівняння $p^4 + 8p^3 + 18p^2 + 16p + 5 = 0$. Складемо таблицю Рауса (таблиця 5.2). Тому що елементи першого стовпця дорівнюють 1; 8; 16; 13.5; 5, то система РА буде стійкою.

Таблиця 5.2 – Коефіцієнти Рауса для розглянутого прикладу

Номер рядка	Номер стовпця		
	1	2	3
1	1	18	5
2	8	16	0
3	16	5	0
4	13.5	0	0
5	5	0	0

Для стійкості системи, яка описується характеристичним рівнянням (5.4), необхідно та достатньо, щоб були позитивними всі його коефіцієнти та головні мінори непарного порядку визначника Гурвіца. Доведення цього критерію можна отримати за допомогою таблиці Рауса для характеристичних рівнянь різних порядків. Запишемо умову стійкості Л'єнара – Шипара для характеристичних рівнянь 1 – 5 порядків (при $a_N = 1$):

1) першого порядку – $a_0 > 0$;

2) другого порядку – $a_0 > 0$; $a_1 > 0$;

3) третього порядку – $a_0 > 0$; $a_1 > 0$; $a_2 > 0$; $a_1 a_2 - a_0 > 0$;

4) четвертого порядку – $a_0 > 0$; $a_1 > 0$; $a_2 > 0$; $a_3 > 0$;

$$a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 > 0;$$

5) п'ятого порядку – $a_0 > 0$; $a_1 > 0$; $a_2 > 0$; $a_3 > 0$; $a_4 > 0$;

$$a_2 a_3 a_4 - a_1 a_4^2 - a_2^2 + a_0 a_4 > 0;$$

$$(a_2 a_3 a_4 - a_1 a_4^2 - a_2^2 + a_0 a_4) a_1 - (a_4 a_3^3 - a_1 a_4 - a_2 a_3 + a_0) a_0 > 0.$$

Отримані нерівності зручні для аналізу стійкості систем РА і при більш високих порядках характеристичних рівнянь. Однак в цьому випадку доцільно використовувати цифрові обчислювальні машини.

Таким чином, можна зробити висновок, що для лінійних аналогових систем РА умови стійкості визначаються лише співвідношенням між параметрами системи та не залежать, на відміну від нелінійних аналогових систем РА, від вхідного сигналу та інших дій. Перевагою алгебраїчних критеріїв стійкості є їх простота, а недоліком – неявний спосіб визначення запасів стійкості, тому що алгебраїчні критерії стійкості є теоретичними, а не експериментальними критеріями. Тому з розвитком частотних методів аналізу радіотехнічних кіл на початку 30-х років виникли критерії стійкості, засновані на частотних методах.

5.4 Частотні критерії стійкості

Частотні критерії стійкості базуються на дослідженні властивостей годографів (амплітудно–фазових характеристик) розімкнених та замкнених систем, а також їх АЧХ, ФЧХ та ЛАЧХ. В цьому випадку існує можливість оцінки стійкості як теоретично, так і експериментально. Найбільше поширення отримали частотні критерії стійкості Михайлова та Найквіста.

Розглянемо ліву частину характеристичного рівняння, яка є характеристичним поліномом

$$D(p) = a_N p^N + a_{N-1} p^{N-1} + \dots + a_k p^k + \dots + a_1 p + a_0. \quad (5.13)$$

Підставивши в цей поліном $p = j\omega$, отримаємо характеристичний комплекс

$$D(j\omega) = a_N (j\omega)^N + a_{N-1} (j\omega)^{N-1} + \dots + a_1 j\omega + a_0 = |D(j\omega)| e^{j\psi(\omega)}, \quad (5.14)$$

де $|D(j\omega)|$ – модуль характеристичного комплексу; $\psi(\omega) = \arg\{D(j\omega)\}$ – аргумент характеристичного комплексу.

Знайдемо повний приріст аргументу $\psi(\omega)$ при зміні частоти ω від $-\infty$ до $+\infty$ для стійкої та нестійкої систем. Для спрощення аналізу обмежимося випадком дійсних коренів характеристичного рівняння.

Представимо характеристичний поліном у вигляді співвідношення (5.7), тобто $D(j\omega) = a_N \prod_{i=1}^N (j\omega - \lambda_i)$, де λ_i – корені характеристичного рівняння, $i = 1, 2, \dots, N$.

Для стійкої системи при дійсних коренях маємо $\lambda_i = -\lambda_i$, $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, N$. Тоді $D(j\omega) = a_N \prod_{i=1}^N (j\omega + \lambda_i)$ та $\psi(\omega) = \sum_{i=1}^N \arctg \frac{\omega}{\lambda_i}$. Звідси

$$\Delta\psi = \psi(\infty) - \psi(-\infty) = \frac{\pi N}{2} - \left(-\frac{\pi N}{2}\right) = \pi N.$$

Таким чином, повний приріст аргументу характеристичного комплексу стійкої системи при зміні частоти ω від $-\infty$ до $+\infty$ складає πN .

Якщо ж система нестійка, та серед N коренів характеристичного рівняння цієї системи є m позитивних коренів, тобто якщо $p_i = \lambda_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, $p_k = -\lambda_k$, $\lambda_k > 0$, $k = m+1, m+2, \dots, N$, то:

$$D(j\omega) = a_N \prod_{i=1}^m (j\omega - \lambda_i) \cdot \prod_{k=m+1}^N (j\omega + \lambda_k);$$

$$\psi(\omega) = \sum_{i=1}^m \arctg \frac{\omega}{-\lambda_i} + \sum_{k=m+1}^N \arctg \frac{\omega}{\lambda_k}.$$

З останнього співвідношення

$$\Delta\psi = \psi(\infty) - \psi(-\infty) = 2\left(-\frac{m\pi}{2} + (N-m)\frac{\pi}{2}\right) = (N-2m)\pi < N\pi.$$

Таким чином, повний приріст аргументу характеристичного комплексу нестійкої системи менше $N\pi$.

Аналогічний результат можна отримати при наявності серед коренів характеристичного поліному комплексно – спряжених коренів.

Таким чином, лінійна замкнена система РА буде стійкою за Михайловим, якщо характеристичний поліном (5.13) не буде мати коренів в правій півплощині комплексного змінного, тобто повний приріст аргументу $\psi(\omega)$

при зміні частоти ω від $-\infty$ до $+\infty$ дорівнює $N\pi$, де N – степінь поліному $D(p)$.

Друге формулювання критерію Михайлова засноване на властивостях годографа Михайлова, тобто якщо при зміні частоти ω від 0 до $+\infty$ годограф Михайлова $G_M(j\omega) = D(j\omega) = \text{Re}_M(\omega) + j\text{Im}_M(\omega)$ починається в точці a_0 та при збільшенні ω послідовно проти годинникової стрілки обходить всі квадранти, не пропускаючи жодного, то така лінійна замкнена система РА буде стійкою (рис.5.3, а). При цьому $a_0 \leq |G_M(j\omega)| < \infty$, а $0 \leq \arg\{G_M(j\omega)\} \leq 0.5\pi N$. Якщо порушується хоча б одна з ознак годографа Михайлова, система буде нестійкою (рис.5.3, б), а якщо годограф Михайлова $G_M(j\omega)$ починається в точці a_0 та проходить через початок координат, то система РА знаходиться в граничному режимі (рис.5.3, в).

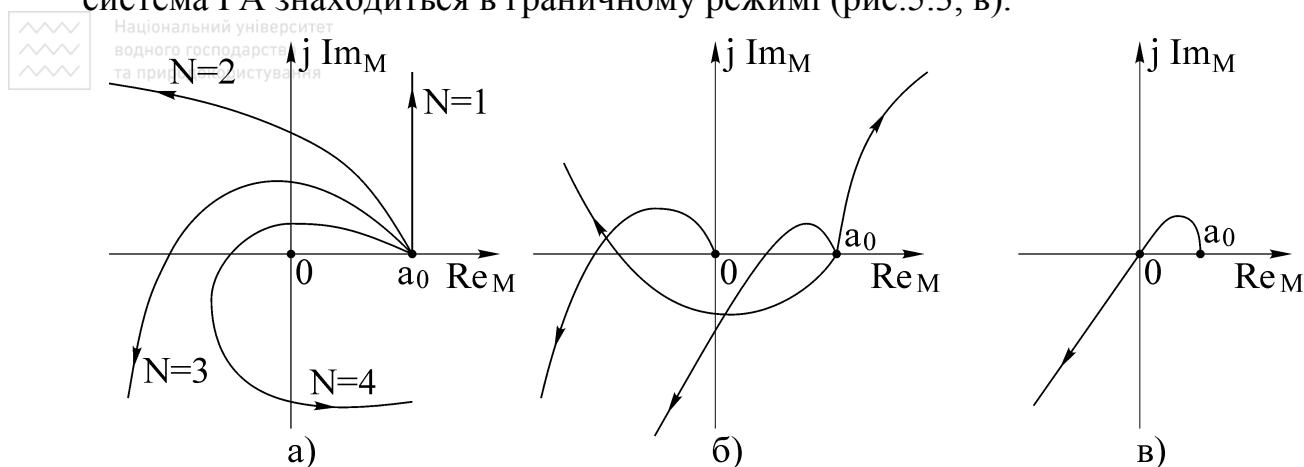


Рисунок 5.3 – Годографи Михайлова: а – стійких систем; б – нестійких систем; в – системи, що знаходиться в граничному режимі

Приклад 5.2. Знайти критичне значення параметрів замкненої системи РА, розглянутої в прикладі 5.1.

Система, розглянута в прикладі 5.1, має характеристичний поліном

$$\tau_2 \tau_3 p^4 + (\tau_2 + \tau_3) p^3 + p^2 + K \tau_1 p + K$$

та характеристичний комплекс

$$\begin{aligned} G_M(j\omega) &= \tau_2 \tau_3 (j\omega)^4 + (\tau_2 + \tau_3) (j\omega)^3 + (j\omega)^2 + K \tau_1 j\omega + K = \\ &= \tau_2 \tau_3 \omega^4 - j\omega^3 (\tau_2 + \tau_3) - \omega^2 + j\omega K \tau_1 + K = \\ &= \tau_2 \tau_3 \omega^4 - \omega^2 + K + j\omega [K \tau_1 - \omega^2 (\tau_2 + \tau_3)] = \text{Re}_M(\omega) + j\text{Im}_M(\omega). \end{aligned}$$

Критичними називають значення параметрів замкненої системи, які відповідають межі стійкості. Це означає, що для знаходження будь-якого з критичних параметрів необхідно розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} \text{Im}_M(\omega) = 0; \\ \text{Re}_M(\omega) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_{\text{кр}} [K_{\text{кр}} \tau_1 - \omega_{\text{кр}}^2 (\tau_2 + \tau_3)] = 0; \\ \tau_2 \tau_3 \omega_{\text{кр}}^4 - \omega_{\text{кр}}^2 + K_{\text{кр}} = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши останню систему рівнянь, отримаємо:

$$\omega_{кр.1} = 0, \quad \omega_{кр.2} = \sqrt{\frac{\tau_1 - \tau_2 - \tau_3}{\tau_1 \tau_2 \tau_3}}, \quad K_{кр} = \frac{(\tau_2 + \tau_3)(\tau_1 - \tau_2 - \tau_3)}{\tau_1^2 \tau_2 \tau_3}.$$

Таким чином, в будь-якому випадку умовою стійкості системи є $K_i < K_{кр}$. Частотний критерій Михайлова також є чисто теоретичним критерієм, тому що потребує наявності передаточної функції замкненої системи $K_{зам}(j\omega)$ або характеристичного поліному $D(p)$.

На практиці більш широке використання (в порівнянні з критерієм Михайлова) знайшов частотний критерій Найквіста, який дозволяє робити висновки про стійкість замкненої системи РА за виглядом годографа або частотних характеристик розімкненого контуру цієї системи. Виведення критерію Найквіста базується на критерії стійкості Михайлова.

Найквіст запропонував розірвати зворотний зв'язок та досліджувати не замкнену систему РА (рис.5.4, а), а розімкнену систему (рис.5.4, б).

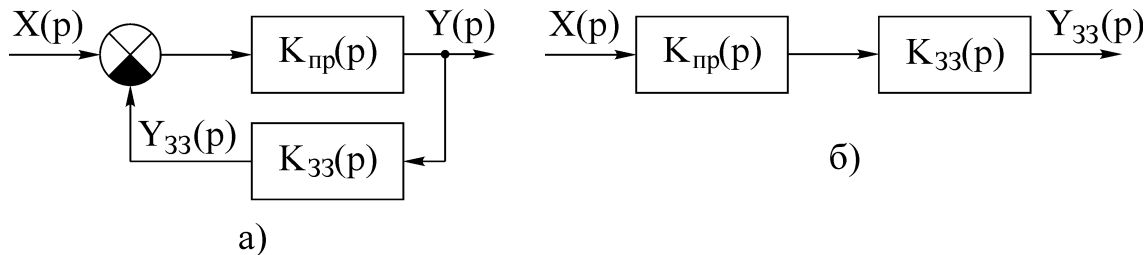


Рисунок 5.4 – Структурні схеми замкненої (а) та розімкненої (б) систем РА

Будемо вважати, що замкнена система РА описується диференціальним рівнянням (5.1). Тоді передаточна функція замкненої системи РА має вигляд

$$K_{зам}(p) = \frac{R(p)}{D(p)} = \frac{\sum_{i=0}^M b_i p^i}{\sum_{k=0}^N a_k p^k}, \quad (5.15)$$

а передаточна функція розімкненого контуру цієї системи

$$K_{роз}(p) = \frac{K_{зам}(p)}{1 - K_{зам}(p)} = \frac{R(p)}{D(p) - R(p)} = \frac{R(p)}{Q(p)} = \frac{\sum_{i=0}^M b_i p^i}{\sum_{k=0}^N c_k p^k}, \quad (5.16)$$

де $Q(p)$ – поліном степеня N .

Введемо допоміжну функцію

$$K_1(p) = 1 + K_{роз}(p) = 1 + \frac{R(p)}{Q(p)} = \frac{D(p)}{Q(p)}. \quad (5.17)$$

Якщо

$$K_{роз}(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega), \quad (5.18)$$

то

$$K_1(j\omega) = 1 + U(\omega) + jV(\omega). \quad (5.19)$$

З співвідношень (5.18) та (5.19) видно, що якщо початок вектора $K_1(j\omega)$ розташувати в точці з координатами $(-1; j0)$, то кінець цього вектора при зміні частоти ω від $-\infty$ до $+\infty$ опише ту саму криву, що і кінець вектора $K_{роз}(j\omega)$, тобто амплітудно – фазову характеристику розімкненого контуру системи РА.

Представимо поліноми $D(j\omega)$ та $Q(j\omega)$ у вигляді

$$D(j\omega) = |D(j\omega)| e^{j\psi_D(\omega)} \quad \text{та} \quad Q(j\omega) = |Q(j\omega)| e^{j\psi_Q(\omega)},$$

де $\psi_D(\omega)$ – аргумент поліному $D(j\omega)$; $\psi_Q(\omega)$ – аргумент поліному $Q(j\omega)$.

Тоді

$$K_1(j\omega) = \left| \frac{D(j\omega)}{Q(j\omega)} \right| e^{j[\psi_D(\omega) - \psi_Q(\omega)]} = |K_1(j\omega)| e^{j\psi_1(\omega)},$$

де $|K_1(j\omega)|$ та $\psi_1(\omega)$ – модуль та аргумент вектора $K_1(j\omega)$.

Чисельник співвідношення (5.17) є характеристичним вектором замкненої системи, а знаменник – характеристичним вектором розімкненої системи. Визначимо зміну аргументу вектора (5.19) для випадку, коли замкнена система стійка, тобто:

$$\arg\{K_1(j\omega)\} = \arg\{D(j\omega)\} - \arg\{Q(j\omega)\} = 0.$$

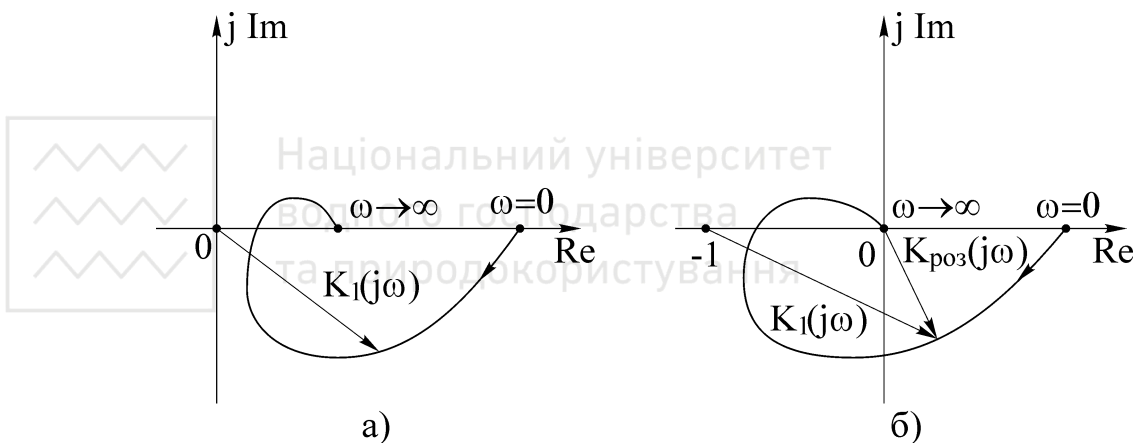


Рисунок 5.5 – До виведення критерію стійкості Найквіста: а – годограф $K_1(j\omega)$ стійкої системи; б – годограф $K_{роз}(j\omega)$ стійкої системи

Таким чином, якщо розімкнена та замкнена системи стійки, то зміна аргументу вектора $K_1(j\omega)$ дорівнює нулю, тобто її годограф не охоплює початку координат (рис.5.5, а). В іншому випадку, коли годограф $K_1(j\omega)$ охоплює початок координат, зміна його аргументу не буде дорівнювати нулю та система в замкненому стані нестійка. Очевидно, що при зміні аргументу вектора

$K_1(j\omega)$ зручніше робити висновки про стійкість за годографом розімкненої системи. Дійсно, зміна аргументу вектора $K_1(j\omega)$ буде дорівнювати нулю (рис.5.5, б), якщо годограф розімкненої системи не охоплює точку з координатами $(-1; j0)$.

Частотний критерій стійкості Найквіста можна сформулювати таким чином. Система РА, стійка в розімкненому стані, буде стійкою і в замкненому стані, якщо годограф розімкненої системи не охоплює точку з координатами $(-1; j0)$. У випадку, коли годограф розімкненої системи охоплює цю точку, система в замкненому стані буде нестійкою (крива 1 на рис.5.6).

Якщо годограф розімкненої системи проходить через точку з координатами $(-1; j0)$, то замкнена система знаходиться на межі стійкості (крива 2 на рис.5.6).



Національний університет
водного господарства
та природокористування

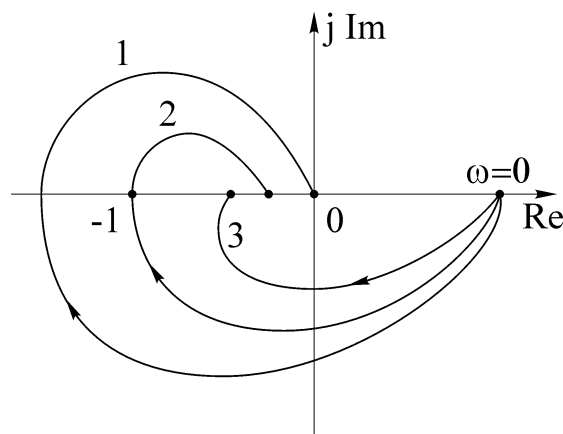


Рисунок 5.6 – Годографи Найквіста: 1 – нестійка система; 2 – система в граничному стані; 3 – стійка система

Аналогічно можна довести критерій Найквіста для випадку, коли розімкнена система нестійка. При цьому система в замкненому стані буде стійкою, якщо годограф розімкненої системи m разів охоплює точку з координатами $(-1; j0)$, де m – кількість полюсів розімкненої системи, розташованих на комплексній площині праворуч від уявної осі.

Практична цінність частотного критерію Найквіста полягає в додаткових формулюваннях, заснованих на вивченні властивостей АЧХ та ФЧХ розімкненої системи.

5.5 Запаси стійкості та способи їх визначення

В процесі експлуатації системи РА її параметри (коефіцієнти підсилення, сталі часу) через зміни зовнішніх умов, коливання напруги джерел живлення та інших факторів відрізняються від розрахованих при проектуванні значень. Якщо в цьому випадку не прийняти деяких визначених заходів, то система РА може стати нестійкою. Для виключення цього явища при проек-

туванні слід забезпечити деякі запаси стійкості системи, які характеризують близькість годографа розімкненої системи до точки з координатами $(-1; j0)$. Запаси стійкості визначають на двох частотах: частоті зрізу $\omega_{зр}$ та критичній частоті $\omega_{кр}$. На частоті зрізу значення АЧХ розімкненої системи дорівнює одиниці, тобто $A_{роз}(\omega_{зр})=1$, а на критичній частоті ФЧХ приймає значення -180° , тобто $\varphi_{роз}(\omega_{кр})=-180^\circ$.

Існують два типи запасів стійкості: запас стійкості за фазою γ та запас стійкості за амплітудою (за підсиленням) h . Запас стійкості за фазою визначає, на яке значення ФЧХ розімкненої системи на частоті зрізу відрізняється від -180° , тобто

$$\gamma = \varphi_{роз}(\omega_{кр}) - \varphi_{роз}(\omega_{зр}) = -180^\circ - \varphi_{роз}(\omega_{зр}). \quad (5.20)$$

Запас стійкості за амплітудою визначає, у скільки разів потрібно збільшити коефіцієнт підсилення для того, щоб система вийшла на межу стійкості, або на скільки значення АЧХ розімкненої системи на критичній частоті відрізняється від одиниці. Тому що ФЧХ розімкненої системи не залежить від коефіцієнтів підсилення, то при їх зміні змінюється тільки масштаб годографу, а запас стійкості за амплітудою визначається таким чином:

$$h = \frac{A_{роз}(\omega_{зр}) - A_{роз}(\omega_{кр})}{A_{роз}(\omega_{зр})} = 1 - A_{роз}(\omega_{кр}) \quad \text{або} \quad \alpha = \frac{1}{A_{роз}(\omega_{кр})}.$$

Системи РА, годографи яких перетинають дійсну вісь тільки праворуч від точки з координатами $(-1; j0)$, називають абсолютно стійкими. Такі системи можуть стати нестійкими лише при збільшенні коефіцієнта підсилення.

Якщо годограф розімкненої системи РА перетинає дійсну вісь також і ліворуч від точки з координатами $(-1; j0)$, то таку систему називають умовно стійкою (рис.5.7). Нестійкою така система може бути як при збільшенні, так і при зменшенні коефіцієнта підсилення.

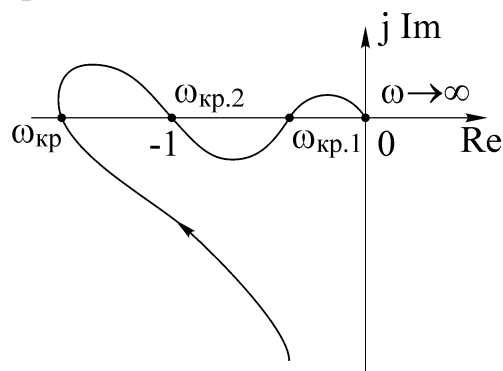


Рисунок 5.7 – Годограф умовно стійкої системи

Розглянемо визначення запасів стійкості за годографом розімкненої системи (рис.5.8, а) та за АЧХ та ФЧХ розімкненої системи (рис.5.8, б).

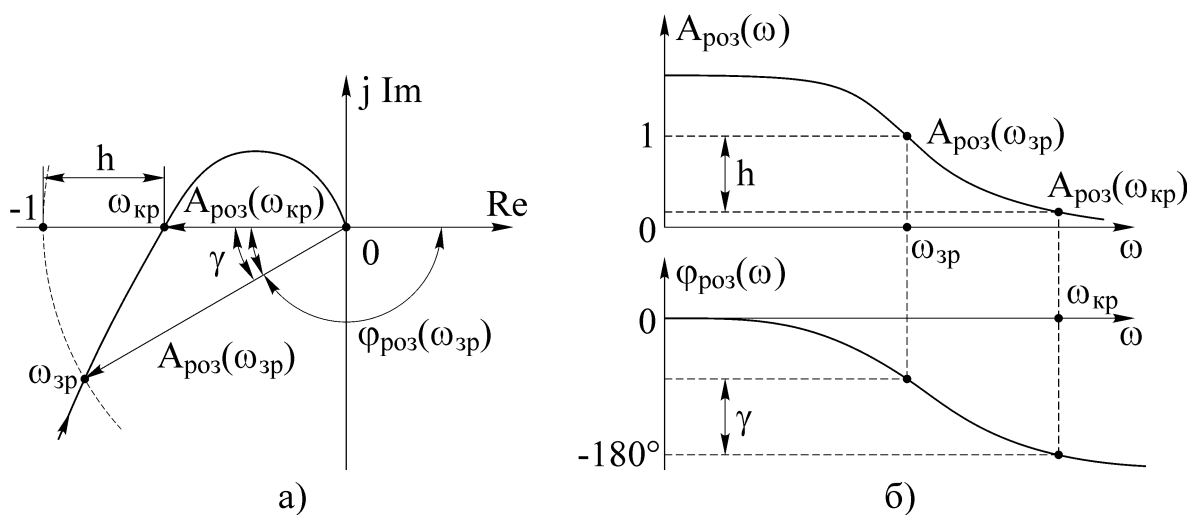


Рисунок 5.8 – Визначення запасів стійкості за годографом (а) та частотними характеристиками (б) розімкнених систем

З проведеного аналізу можна вивести додаткове формулювання критерію Найквіста: стійка в розімкненому стані система РА збереже стійкість при замиканні, якщо критична частота буде більше частоти зрізу ($\omega_{кр} > \omega_{зр}$); якщо $\omega_{кр} = \omega_{зр}$ (годограф проходить через точку з координатами $(-1; j0)$), то система знаходиться в граничному стані; якщо $\omega_{кр} < \omega_{зр}$, то стійка розімкнена система РА при замиканні втрачає стійкість.

Для нормальної роботи систем РА необхідно, щоб запас стійкості за амплітудою α був не менше двох, а запас стійкості за фазою $\gamma = (30 \div 60)^\circ$. Якщо наведені вище умови не виконуються, то задаються значенням γ та змінюють сталі часу та еквівалентний коефіцієнт підсилення системи РА. На практиці запаси стійкості корегуються зміною однієї складової еквівалентної передаточної функції або сталою часу корегувального фільтра.

Приклад 5.3. Розрахувати запаси стійкості системи РА, передаточна функція якої в розімкненому стані визначається співвідношенням $K_{роз}(p) = \frac{K(1+p\tau_1)}{p(1+p\tau_2)(1+p\tau_3)}$, а параметри системи відповідно дорівнюють: $\tau_1 = 5 \text{ мс}$; $\tau_2 = 100 \text{ мс}$; $\tau_3 = 40 \text{ мс}$; $K = 30 \text{ с}^{-1}$.

Спочатку необхідно знайти АЧХ та ФЧХ досліджуваної системи:

$$A_{роз}(\omega) = \frac{K}{\omega} \sqrt{\frac{1 + \omega^2 \tau_1^2}{(1 + \omega^2 \tau_2^2)(1 + \omega^2 \tau_3^2)}} = \frac{K}{\omega} \sqrt{\frac{1 + \omega^2 \tau_1^2}{\tau_2^2 \tau_3^2 \omega^4 + (\tau_2^2 + \tau_3^2) \omega^2 + 1}};$$

$$\varphi_{роз}(\omega) = -90^\circ + \arctg \omega \tau_1 - \arctg \omega \tau_2 - \arctg \omega \tau_3 =$$

$$= -90^\circ - \arctg \frac{\omega(\tau_2 + \tau_3 - \tau_1) + \omega^3 \tau_1 \tau_2 \tau_3}{1 + \omega^2(\tau_1 \tau_2 + \tau_1 \tau_3 - \tau_2 \tau_3)}.$$

Далі необхідно знайти критичну частоту та частоту зрізу:

$$\varphi_{\text{роз}}(\omega_{\text{кр}}) = -180^0 = -90^0 - \arctg \frac{\omega_{\text{кр}}(\tau_2 + \tau_3 - \tau_1) + \omega_{\text{кр}}^3 \tau_1 \tau_2 \tau_3}{1 + \omega_{\text{кр}}^2(\tau_1 \tau_2 + \tau_1 \tau_3 - \tau_2 \tau_3)};$$

$$\arctg \frac{\omega_{\text{кр}}(\tau_2 + \tau_3 - \tau_1) + \omega_{\text{кр}}^3 \tau_1 \tau_2 \tau_3}{1 + \omega_{\text{кр}}^2(\tau_1 \tau_2 + \tau_1 \tau_3 - \tau_2 \tau_3)} = 90^0 \Rightarrow 1 + \omega_{\text{кр}}^2(\tau_1 \tau_2 + \tau_1 \tau_3 - \tau_2 \tau_3) = 0;$$

$$\omega_{\text{кр}} = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2 + \tau_1 \tau_3 - \tau_2 \tau_3}} = \frac{1}{\sqrt{0.1 \cdot 0.04 + 0.005 \cdot 0.1 - 0.005 \cdot 0.04}} = 17.41 \text{ рад/с};$$

$$A_{\text{роз}}(\omega_{\text{зр}}) = \frac{K}{\omega_{\text{зр}}} \sqrt{\frac{1 + \omega_{\text{зр}}^2 \tau_1^2}{\tau_2^2 \tau_3^2 \omega_{\text{зр}}^4 + (\tau_2^2 + \tau_3^2) \omega_{\text{зр}}^2 + 1}} = 1;$$

$$K^2(1 + \omega_{\text{зр}}^2 \tau_1^2) = \omega_{\text{зр}}^2 [\tau_2^2 \tau_3^2 \omega_{\text{зр}}^4 + (\tau_2^2 + \tau_3^2) \omega_{\text{зр}}^2 + 1];$$

$$\tau_2^2 \tau_3^2 \omega_{\text{зр}}^6 + (\tau_2^2 + \tau_3^2) \omega_{\text{зр}}^4 + (1 - K^2 \tau_1^2) \omega_{\text{зр}}^2 - K^2 = 0;$$

$$\omega_{\text{зр}}^2 = X \Rightarrow 0.1^2 \cdot 0.04^2 \cdot X^3 + (0.1^2 + 0.04^2) \cdot X^2 + (1 - 30^2 \cdot 0.005^2) \cdot X - 30^2 = 0;$$

$$X^3 + 725 X^2 + 61094 X - 5.625 \cdot 10^7 = 0;$$

$$Y = X + \frac{725}{3} = X + 241.7 \Rightarrow Y^3 + \left(61094 - \frac{725^2}{3}\right) Y + \frac{2 \cdot 725^3}{27} -$$

$$- \frac{725 \cdot 61094}{3} - 5.625 \cdot 10^7 = Y^3 - 114114 Y - 42786374 = 0;$$

$$Y = \sqrt[3]{0.5 \cdot 42786374} + \sqrt{\left(-\frac{114114}{3}\right)^3 + \left(-\frac{42786374}{2}\right)^2} +$$

$$+ \sqrt[3]{0.5 \cdot 42786374 - \sqrt{\left(-\frac{114114}{3}\right)^3 + \left(-\frac{42786374}{2}\right)^2}} = \sqrt[3]{21393187 + 20065683} +$$

$$+ \sqrt[3]{21393187 - 20065683} = 346.1 + 109.9 = 456;$$

$$X = Y - 241.7 = 456 - 241.7 = 214.3; \quad \omega_{\text{зр}} = \sqrt{X} = \sqrt{214.3} = 14.64 \text{ рад/с}.$$

Порівнявши значення критичної частоти $\omega_{\text{кр}} = 17.41 \text{ рад/с}$ та частоти зрізу $\omega_{\text{зр}} = 14.64 \text{ рад/с}$, можна зробити висновок, що при замиканні система збереже стійкість.

Запаси стійкості за амплітудою та фазою будуть визначатися такими співвідношеннями:

$$h = 1 - A_{\text{роз}}(\omega_{\text{кр}}) = 1 - \frac{30}{17.41} \sqrt{\frac{1 + 17.41^2 \cdot 0.005^2}{0.1^2 \cdot 0.04^2 \cdot 17.41^4 + (0.1^2 + 0.04^2) \cdot 17.41^2 + 1}} =$$

$$= 1 - 0.707 = 0.293;$$

$$\alpha = \frac{1}{A_{\text{роз}}(\omega_{\text{кр}})} = \frac{1}{0.707} = 1.415;$$

$$\begin{aligned} \gamma &= -180^\circ + 90^\circ + \arctg \frac{14.64 \cdot (0.1 + 0.04 - 0.005) + 14.64^3 \cdot 0.005 \cdot 0.1 \cdot 0.04}{1 + 14.64^2 \cdot (0.005 \cdot 0.1 + 0.005 \cdot 0.04 - 0.1 \cdot 0.04)} = \\ &= -90^\circ + 81.83^\circ = -8.17^\circ. \end{aligned}$$

5.6 Оцінка стійкості за логарифмічними частотними характеристиками

Побудова годографів розімкнених систем РА пов'язана зі значними математичними обчисленнями, тому їх стійкість доцільно оцінювати за логарифмічними АЧХ та ФЧХ. Для цього необхідно побудувати логарифмічні частотні характеристики розімкненої системи.

У випадку, коли годограф $K_{\text{роз}}(j\omega)$ не має точок перетину з дійсною віссю ліворуч від точки з координатами $(-1; j0)$, то для стійкості замкненої системи РА необхідно та достатньо, щоб виконувалась умова $\omega_{\text{кр}} > \omega_{\text{зр}}$ (рис.5.9, а).

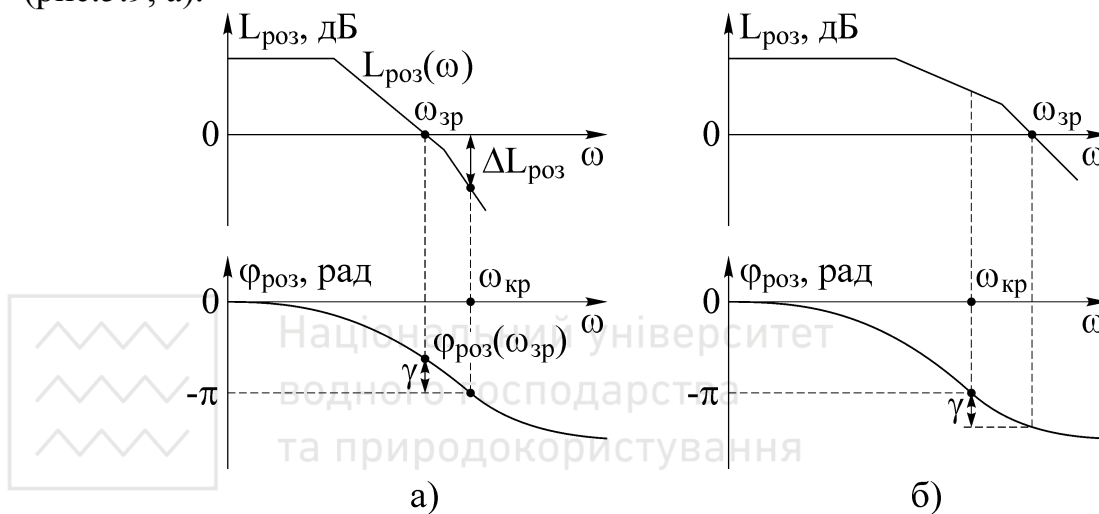


Рисунок 5.9 – Логарифмічні частотні характеристики розімкненої системи: а – стійкої; б – нестійкої

В умовно стійких системах РА для оцінки стійкості слід в діапазоні частот, де ЛАЧХ більше нуля, підрахувати кількість переходів ЛФЧХ через пряму $-\pi$. Якщо кількість позитивних переходів через цю пряму дорівнює кількості негативних, то система в замкненому стані буде стійкою (рис.5.10).

За логарифмічними та частотними характеристиками розімкненої системи РА можна визначити запаси стійкості: запас стійкості за фазою визначають за ЛФЧХ на частоті зрізу, а запас стійкості за амплітудою – за ЛАЧХ на критичній частоті, при цьому $\Delta L_{\text{роз}}$ береться з зворотним знаком (див.

рис.5.9, а). Якщо $\omega_{кр} = \omega_{зр}$, то досліджувана система РА знаходиться на межі стійкості.

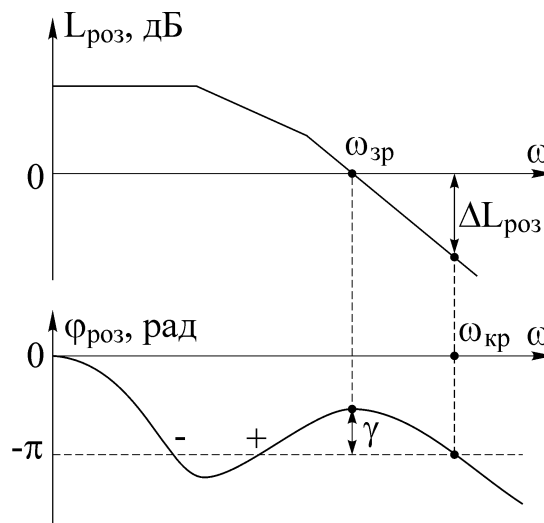


Рисунок 5.10 – До оцінки стійкості умовно стійкої системи

Критичний коефіцієнт підсилення можна розрахувати за таким співвідношенням:

$$20\lg K_{кр} = 20\lg K + \Delta L_{роз}.$$

Наприкінці додамо деякі рекомендації, які виходять з практики проектування систем РА. По–перше, для того, щоб в системі РА були забезпечені необхідні запаси стійкості, нахил ЛАЧХ в діапазоні частот, в якому розташована частота зрізу, повинен дорівнювати -20 дБ/дек. При нахилі ЛАЧХ -40 дБ/дек важко забезпечити необхідний запас стійкості за фазою, а при нахилі 0 дБ/дек отримують досить великі запаси стійкості за фазою, тому система стає передемпфированою з тривалим перехідним процесом. По–друге, запас стійкості за фазою в системі РА залежить від діапазону частот, в якому ЛАЧХ розімкненої системи на частоті зрізу має нахил -20 дБ/дек. Чим більшим є цей діапазон частот, тим більше запас стійкості за фазою і навпаки.

5.7 Стійкість систем радіоавтоматики з запізненням

Розглянемо стійкість систем РА, до складу яких входять пристрої з запізненням (цифрові елементи, різноманітні запам'ятовувальні пристрої і т. і.). Передаточну функцію розімкненої системи з запізненням запишемо у вигляді

$$K_{роз\tau}(p) = K_{роз}(p)e^{-p\tau}, \quad (5.23)$$

де $K_{роз}(p)$ – передаточна функція розімкненої системи без запізнення; τ – час запізнення.

Передаточній функції (5.23) відповідають такі АЧХ та ФЧХ розімкненої системи:

$$A_{роз\tau}(\omega) = A_{роз}(\omega); \quad \varphi_{роз\tau}(\omega) = \varphi_{роз}(\omega) - \omega\tau,$$

де $A_{\text{роз}}(\omega)$ та $\varphi_{\text{роз}}(\omega)$ – АЧХ та ФЧХ розімкненої системи без запізнення.

З розглянутих частотних характеристик виходить, що запізнення впливає тільки на ФЧХ досліджуваної системи, створюючи на кожній частоті додатковий фазовий зсув, пропорційний часу запізнення τ . Тому системи РА, стійкі без запізнення, можуть стати нестійкими при включенні до їх складу пристроїв з запізненням. Для оцінки стійкості систем з запізненням можуть бути використані логарифмічні частотні характеристики.

Приклад 5.4. Визначити запаси стійкості системи РА, яка в розімкненому стані описується передаточною функцією $K_{\text{роз}\tau}(p) = \frac{K}{p(1+p\tau_1)}e^{-p\tau_2}$, а параметри системи відповідно дорівнюють: $K = 10 \text{ с}^{-1}$; $\tau_1 = 20 \text{ мс}$; $\tau_2 = 50 \text{ мс}$.

Спочатку визначимо АЧХ та ФЧХ досліджуваної системи з запізненням та без запізнення:

$$A_{\text{роз}}(\omega) = \frac{K}{\omega\sqrt{1+\omega^2\tau_1^2}}; \quad A_{\text{роз}\tau}(\omega) = A_{\text{роз}}(\omega) = \frac{K}{\omega\sqrt{1+\omega^2\tau_1^2}};$$

$$\varphi_{\text{роз}}(\omega) = -90^\circ - \arctg \omega\tau_1; \quad \varphi_{\text{роз}\tau}(\omega) = -90^\circ - \arctg \omega\tau_1 - \omega\tau_2.$$

Далі знайдемо критичну частоту та частоту зрізу для досліджуваної системи без запізнення та з запізненням:

$$\varphi_{\text{роз}}(\omega_{\text{кр}}) = -180^\circ \Rightarrow \arctg \omega_{\text{кр}}\tau_1 = 90^\circ \Rightarrow \omega_{\text{кр}} = \infty;$$

$$A_{\text{роз}}(\omega_{\text{зр}}) = 1 \Rightarrow K^2 = \omega_{\text{зр}}^2(1 + \omega_{\text{зр}}^2\tau_1^2) \Rightarrow \omega_{\text{зр}} = 9.8 \text{ рад/с};$$

$$\varphi_{\text{роз}\tau}(\omega_{\text{кр.}\tau}) = -180^\circ \Rightarrow \arctg \omega_{\text{кр.}\tau}\tau_1 + \omega_{\text{кр.}\tau}\tau_2 = 90^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_{\text{кр.}\tau}\tau_1 + \frac{1}{3}\omega_{\text{кр.}\tau}^3\tau_1^3 + \omega_{\text{кр.}\tau}\tau_2 \approx 90^\circ \Rightarrow \omega_{\text{кр.}\tau} \approx 22.8 \text{ рад/с};$$

$$A_{\text{роз}\tau}(\omega_{\text{зр.}\tau}) = A_{\text{роз}}(\omega_{\text{зр}}) \Rightarrow \omega_{\text{зр.}\tau} = \omega_{\text{зр}} = 9.8 \text{ рад/с}.$$

Для розрахованих значень критичних частот та частоти зрізу знайдемо значення запасів стійкості системи без запізнення та з запізненням:

$$h = 1 - A_{\text{роз}}(\omega_{\text{кр}}) = 1 - \frac{10}{\infty \cdot \sqrt{1 + 0.02^2 \cdot \infty^2}} = 1 - 0 = 1;$$

$$h_\tau = 1 - A_{\text{роз}}(\omega_{\text{кр.}\tau}) = 1 - \frac{10}{22.8 \cdot \sqrt{1 + 0.02^2 \cdot 22.8^2}} = 1 - 0.4 = 0.6;$$

$$\alpha = \frac{1}{A_{\text{роз}}(\omega_{\text{кр}})} = \frac{1}{0} = \infty;$$

$$\alpha_\tau = \frac{1}{A_{\text{роз}}(\omega_{\text{кр.}\tau})} = \frac{1}{0.4} = 2.5;$$

$$\gamma = -180^\circ - \varphi_{\text{роз}}(\omega_{\text{зр}}) = -180^\circ + 90^\circ + \arctg 9.8 \cdot 0.02 = -78.9^\circ;$$

$$\gamma_\tau = -180^\circ - \varphi_{\text{роз}\tau}(\omega_{\text{зр.}\tau}) = -180^\circ + 90^\circ + \arctg 9.8 \cdot 0.02 + 9.8 \cdot 0.05 \cdot 57.3 = -50.8^\circ.$$

З останнього співвідношення можна визначити, при якому значенні запізнення розглянута система РА стає нестійкою:

$$\tau_{2.кр} = \frac{180^0 - 90^0 - \arctg \omega_{зр} \tau_1}{57.3 \cdot \omega_{зр}} = \frac{90^0 - \arctg 9.8 \cdot 0.02}{57.3 \cdot 9.8} = 0.14 \text{ с.}$$

Таким чином, в розглянутій системі при введенні запізнення запаси стійкості системи за амплітудою та фазою зменшуються, тому що зменшується критична частота системи та збільшується фазовий зсув, що вноситься досліджуваною системою на частоті зрізу.

5.8 Статична система, що буде стійкою в розімкненому стані

Розглянемо систему РА, до складу якої входять лише стійкі позиційні кола, тобто систему, всі корені характеристичного поліному розімкненого контуру якої мають від'ємні дійсні частини. Тоді, використовуючи критерій Михайлова до полінома $Q(j\omega)$, маємо $\Delta\psi_Q = N\pi$ та, відповідно, $\Delta\psi_1 = \Delta\psi_D - \Delta\psi_Q = N\pi - N\pi = 0$.

Таким чином, вектор $K_1(j\omega)$, описавши годограф цієї системи, не повинен здійснювати жодного оберту навкруг свого початку координат, тобто навкруг точки з координатами $(-1; j0)$ (рис.5.11). З наведеного рисунку можна зробити висновок, що для розглянутої системи $\Delta\psi_1 = 0$ лише у випадку, коли годограф цієї системи не охоплює точку з координатами $(-1; j0)$. Якщо годограф, наведений на рис.5.11, охоплює цю точку, то повний приріст аргументу $\Delta\psi_1$ складає 4π .

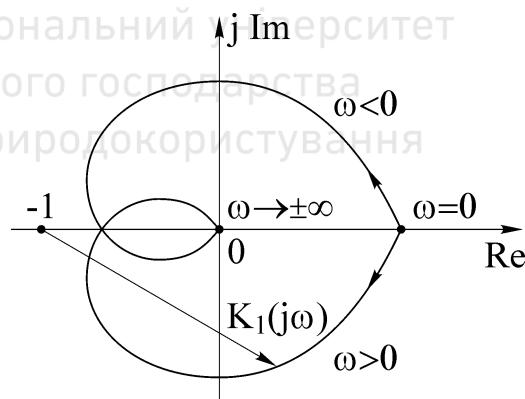


Рисунок 5.11 – Годограф $K_1(j\omega)$ розімкненої системи

Для подальшого розгляду важливо відзначити, що внутрішня область, обмежена кривою $K_1(j\omega)$, лежить праворуч від цієї кривої при зміні частоти в напрямку збільшення від 0 до $+\infty$ та далі від $-\infty$ до 0.

Таким чином, розглядаючи умови стійкості статичної системи РА, можна користуватися частотним критерієм Найквіста, згідно з яким для стій-

кості замкненої системи РА, стійкої в розімкненому стані, необхідно та достатньо, щоб годограф розімкненого контуру цієї системи, побудований при зміні частоти ω від $-\infty$ до $+\infty$, не охоплював критичної точки з координатами $(-1; j0)$.

5.9 Астатична система з астатизмом першого порядку

Розглянемо систему РА, яка, окрім стійких позиційних кіл, містить одне інтегруюче коло. Наближений вигляд годографа такої системи наведений на рис.5.12. Характеристичний поліном розімкненого контуру такої системи

$$Q(p) = p \prod_{k=1}^{N-1} (1 + p\tau_k)$$

має один нульовий корінь та $N-1$ коренів з від'ємною дійсною частиною.

Використовуючи до такого характеристичного поліному критерій Михайлова, знаходимо, що при зміні частоти ω від $-\infty$ до $+\infty$ повний приріст аргументу полінома дорівнює $\Delta\psi_Q = (N-1)\pi$.



Рисунок 5.12 – Годограф астатичної системи з астатизмом першого порядку

Для розглянутого випадку маємо $\Delta\psi_1 = \Delta\psi_D - \Delta\psi_Q = N\pi - (N-1)\pi = \pi$. Це означає, що вектор $K_1(j\omega)$ при зміні частоти ω від 0 до $+\infty$ та далі від $-\infty$ до 0 повинен повернутися на кут π проти годинникової стрілки ($\Delta\psi_1$ позитивне), як показано на рис.5.12. З рисунку видно, що годограф досліджуваної системи ділить площину на дві області – “внутрішню”, що лежить праворуч від годографа при переміщенні в напрямку збільшення частоти, та “зовнішню”. Як і в попередньому випадку, замкнена система РА буде стійкою, якщо точка з координатами $(-1; j0)$ не потрапляє у внутрішню область, тобто якщо годограф досліджуваної системи РА не охоплює цю точку.

Таким чином, наведене формулювання критерію стійкості Найквіста залишається справедливим і для систем РА з астатизмом першого порядку.

5.10 Астатична система з астатизмом другого порядку

Розглянемо систему РА, яка, окрім стійких позиційних кіл, містить два інтегрувальних кола. Наближений вигляд годографа такої системи наведений на рис.5.13. Характеристичний поліном розімкненого контуру системи з астатизмом другого порядку

$$Q(p) = p^2 \prod_{k=1}^{N-2} (1 + p\tau_k)$$

має два нульових кореня (нульовий корінь другого порядку) та $N - 2$ коренів з від'ємною дійсною частиною. Використовуючи до такого характеристичного поліному критерій Михайлова, знаходимо, що при зміні частоти ω від $-\infty$ до $+\infty$ повний приріст аргументу полінома дорівнює $\Delta\psi_Q = (N - 2)\pi$.

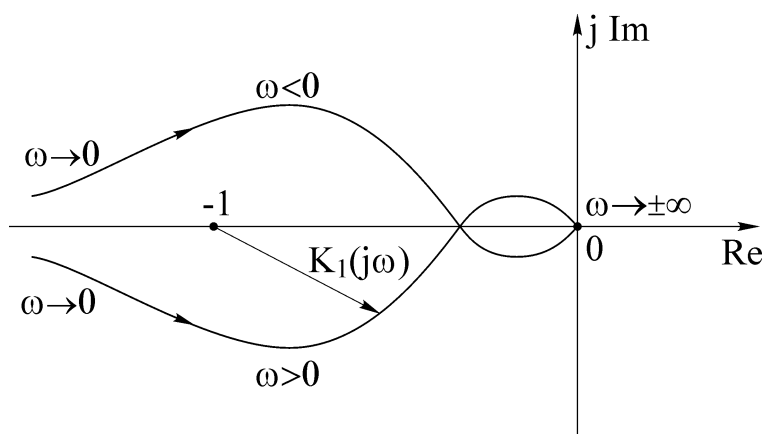


Рисунок 5.13 – Годограф астатичної системи з астатизмом другого порядку

Тоді $\Delta\psi_1 = \Delta\psi_D - \Delta\psi_Q = N\pi - (N - 2)\pi = 2\pi$. Це означає, що вектор $K_1(j\omega)$ при зміні частоти ω від 0 до $+\infty$ та далі від $-\infty$ до 0 повинен повернутися на кут 2π проти годинникової стрілки ($\Delta\psi_1$ позитивне), як показано на рис.5.13. З рисунку видно, що годограф досліджуваної системи ділить площину на дві області – “внутрішню”, що лежить праворуч від годографа при переміщенні в напрямку збільшення частоти, та “зовнішню”. Таким чином, як і в попередніх випадках, замкнена система РА з астатизмом другого порядку буде стійкою, якщо точка з координатами $(-1; j0)$ не потрапляє у внутрішню область, тобто якщо годограф досліджуваної системи РА не охоплює цю точку.

Перевагою критерію Найквіста є можливість його використання для визначення стійкості системи за експериментально знятими частотними характеристиками, тобто для випадків, коли отримати диференціальне рівняння досліджуваної системи складно або зовсім неможливо.

5.11 Абсолютно стійкі та умовно стійкі системи

Розглянемо замкнену систему РА з одиничним від'ємним зворотним зв'язком, яка, наприклад, описується характеристичним рівнянням

$$\tau_1 \tau_2 p^3 + (\tau_1 + \tau_2) p^2 + p + K_1 = 0 \quad (5.24)$$

та має передаточну функцію розімкненого контуру вигляду

$$K(p) = \frac{K_1}{p(1 + p\tau_1)(1 + p\tau_2)}, \quad (5.25)$$

що відповідає астатизму першого порядку. З співвідношення (5.25)

$$A_{\text{роз}}(\omega) = \frac{K_1}{\omega \sqrt{(1 + \omega^2 \tau_1^2)(1 + \omega^2 \tau_2^2)}} = \frac{K_1}{\omega \sqrt{\tau_1^2 \tau_2^2 \omega^4 + (\tau_1^2 + \tau_2^2) \omega^2 + 1}}; \quad (5.26)$$

$$\varphi_{\text{роз}}(\omega) = -90^\circ - \arctg \omega \tau_1 - \arctg \omega \tau_2 = -90^\circ - \arctg \frac{\omega(\tau_1 + \tau_2)}{1 - \omega^2 \tau_1 \tau_2}. \quad (5.27)$$

Годограф стійкої системи, що відповідає співвідношенню (5.25), наведений на рис.5.14, крива 1 (для позитивних значень ω). Точка перетину годографа з від'ємною напіввіссю абсцис відповідає критичній частоті $\omega_{\text{кр}}$, на якій $\varphi_{\text{роз}}(\omega_{\text{кр}}) = -180^\circ$. Точка перетину годографа з колом одиничного радіуса відповідає частоті зрізу $\omega_{\text{зр}}$, на якій $A_{\text{роз}}(\omega_{\text{зр}}) = 1$.

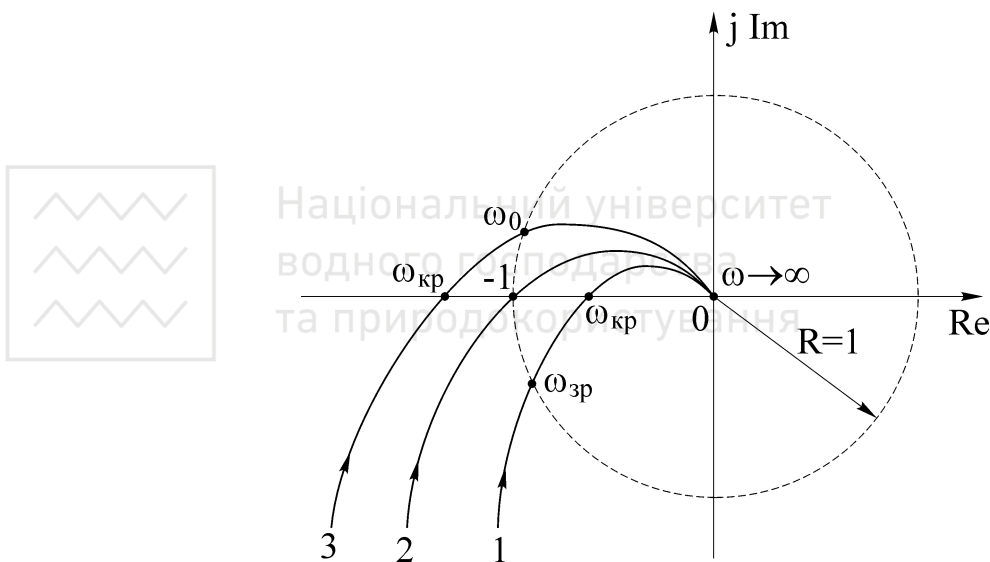


Рисунок 5.14 – Годографи досліджуваної системи РА

Зміні частоти ω від 0 до $+\infty$ відповідає переміщення точки по годографу в напрямку, вказаному на рис.5.14 стрілкою. Для стійкості системи повинна виконуватись умова $\omega_{\text{кр}} > \omega_{\text{зр}}$.

При збільшенні коефіцієнта K_1 досліджуваної системи годограф, як видно з рис.5.14, наближається до критичної точки з координатами $(-1; j0)$,

при цьому частоти $\omega_{зр}$ та $\omega_{кр}$ наближаються одна до одної та у випадку, коли годограф (крива 2 на рис.5.14) проходить через критичну точку, стають однаковими ($\omega_{зр} = \omega_{кр}$). При цьому в характеристичному рівнянні (5.24) системи з'являється пара чисто уявних коренів $p_{1,2} = \pm j\beta_{12}$ та в системі виникають незгасні гармонічні коливання з частотою β_{12} .

Розглянутий випадок відповідає так званій коливальній межі стійкості. При подальшому збільшенні коефіцієнта K_1 годограф системи буде охоплювати критичну точку з координатами $(-1; j0)$ та система стає нестійкою. Аналогічний результат можна отримати при використанні критерію Гурвіца.

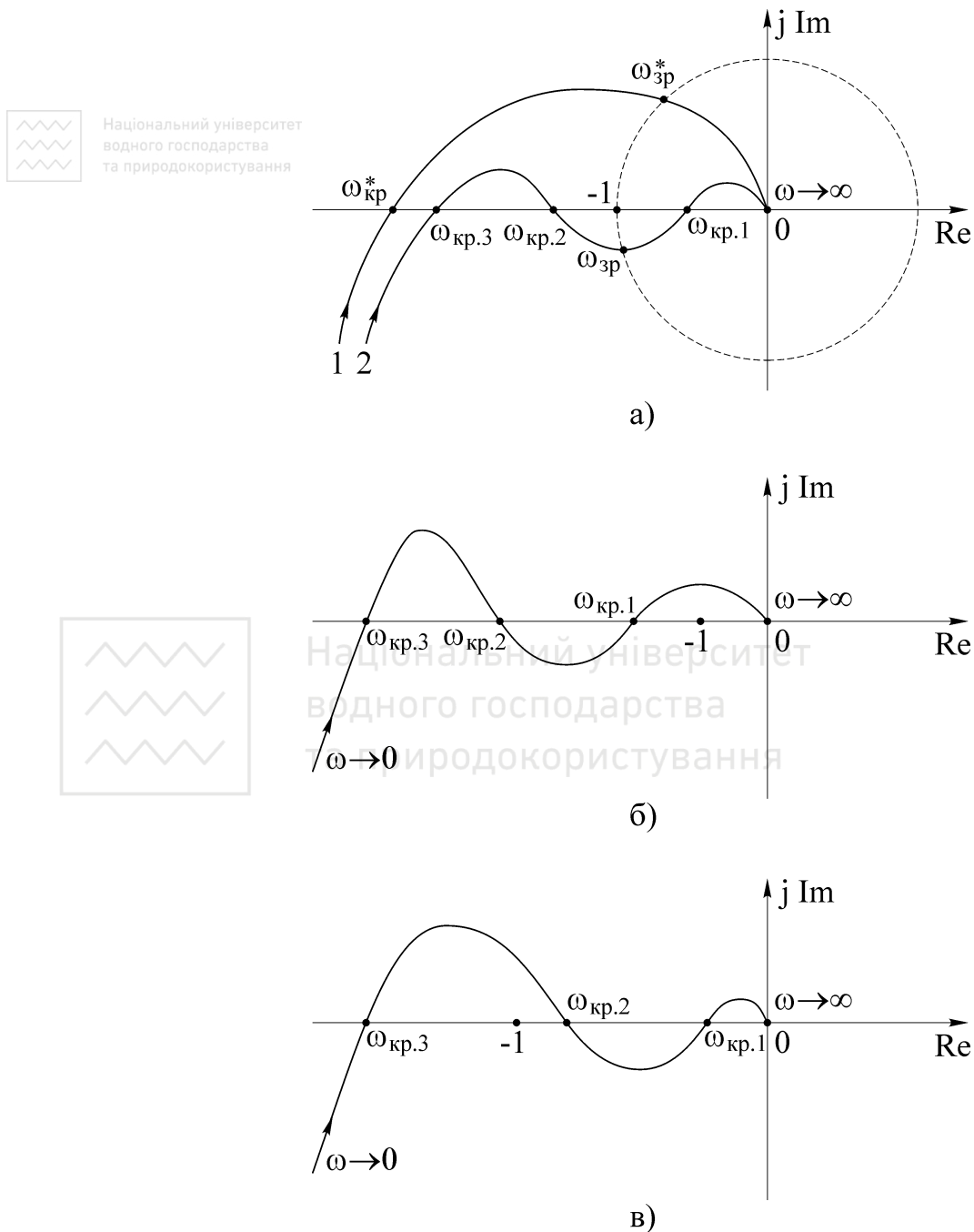


Рисунок 5.15 – До визначення абсолютно стійких та умовно стійких систем

Системи РА, коефіцієнт передачі яких K_1 обмежений умовами стійкості лише з верхнього боку ($K_1 < K_{1.кр}$), носять назву абсолютно стійких систем. При проектуванні замкнених систем РА коефіцієнт передачі K_1 вибирають не з умов стійкості, а з умов точності. Тому, як правило, коефіцієнт передачі систем з високою точністю значно перевищує значення, припустиме за умовами стійкості. В цьому випадку для забезпечення стійкості системи РА до її складу включають корегувальні пристрої, складені з форсувальних кіл, які в деякій визначеній смузі частот зменшують від'ємний фазовий зсув, що вноситься інтегровальними та аперіодичними колами. В цьому випадку годограф системи РА деформується (рис.5.15, а, крива 2). Крива 1 на рис.5.15, а відповідає годографу системи РА без корегувальних кіл.

Як видно з рис.5.15, а, годограф скорегованої системи не охоплює критичної точки з координатами $(-1; j0)$, тобто система буде стійкою.

Відзначимо, що після корекції з'явилися три критичні частоти $\omega_{кр.1}$, $\omega_{кр.2}$ та $\omega_{кр.3}$ замість однієї $\omega_{кр}^*$ до корекції, при цьому $\omega_{кр.1} > \omega_{кр.2} > \omega_{кр.3}$. Крім того, змінились співвідношення між цими частотами: $\omega_{кр}^* < \omega_{зр}^*$ – до корекції, що свідчить про нестійкий режим роботи системи, та $\omega_{кр.1} > \omega_{зр}$ – після корекції, що характерно для стійкого режиму роботи системи. При цьому суттєвою є обставина, що дві критичні частоти $\omega_{кр.3}$ та $\omega_{кр.2}$ менші частоти зрізу $\omega_{зр}$.

Розглянемо стійкість скорегованої системи. З рис.5.15 видно, що при збільшенні коефіцієнта передачі K_1 скорегованої системи точка, що відповідає частоті $\omega_{кр.1}$, наближається до критичної точки з координатами $(-1; j0)$, та при деякому значенні K_1 годограф скорегованої системи буде охоплювати критичну точку, як показано на рис.5.15, б, тобто система стане нестійкою. Таким чином, для скорегованої системи обмеження з верхнього боку коефіцієнта передачі K_1 зберігається, хоча граничне (критичне) значення $K_{1.кр}$ скорегованої системи може бути в десятки разів більше критичного значення коефіцієнта передачі нескорегованої системи.

При зменшенні K_1 до критичної точки з координатами $(-1; j0)$ буде наближатися критична частота $\omega_{кр.2}$ (див. рис.5.15, а). При деякому достатньо малому значенні K_1 ця точка буде знаходитись праворуч від точки $(-1; j0)$ та годограф системи, як видно з рис.5.15, в, знову буде охоплювати критичну точку, тобто система РА знову стане нестійкою. Таким чином, для розглянутої скорегованої системи РА разом з обмеженням K_1 з верхнього боку з'являється обмеження припустимого значення з нижнього боку, тобто система буде стійкою при $K_{1.min} < K_1 < K_{1.max}$.

Системи, припустимі значення коефіцієнта передачі яких мають обмеження як з боку максимальних, так і з боку мінімальних значень, носять назву умовно стійких. Відзначимо, що для умовно стійких систем РА з астатизмом не більше другого порядку кількість частот $\omega_{кр.i}$, менших частоти зрізу $\omega_{зр}$, завжди парна. Ця ознака використовується для аналізу стійкості систем РА методом логарифмічних частотних характеристик (дивись п.5.6).

В якості висновків відзначимо, що частотний критерій Найквіста використовується в тому випадку, якщо систему РА можна зробити розімкненою. Критерій Найквіста є більш універсальним (в порівнянні з критеріями Гурвіца та Михайлова), тому що дозволяє оцінювати стійкість як теоретично, так і практично (за експериментально знятими АЧХ та ФЧХ), а також дозволяє кількісно оцінювати запаси стійкості.



Національний університет
водного та природокористування

Контрольні запитання

1. Дайте визначення стійкості системи РА з фізичної та математичної точок зору.
2. Який характер має перехідний процес в стійкій та нестійкій системах РА?
3. Доведіть необхідну умову стійкості.
4. Доведіть достатню умову стійкості.
5. Що таке критерії стійкості та яким чином вони зв'язані з необхідними та достатніми умовами стійкості?
6. Що таке межа стійкості та яким чином в цьому випадку розташовані корені характеристичного рівняння системи РА на площині комплексного змінного?
7. Сформулюйте критерій стійкості Гурвіца.
8. Яким чином за критерієм Гурвіца обчислюється критичний коефіцієнт підсилення та запас стійкості за підсиленням?
9. Сформулюйте частотні критерії стійкості Михайлова та Найквіста.
10. Що таке частота зрізу та критична частота?
11. Яким чином визначаються частота зрізу та критична частота за годографом та частотними характеристиками розімкненої системи РА?
12. Яким чином визначаються запаси стійкості за годографом та частотними характеристиками розімкненої системи РА?
13. Чому для оцінки близькості системи РА до межі стійкості необхідно використовувати як запаси стійкості за амплітудою, так і запаси стійкості за фазою?
14. Як визначаються запаси стійкості за логарифмічними частотними характеристиками?
15. Як обчислюється критичний коефіцієнт підсилення за ЛАЧХ?
16. Назвіть особливості визначення запасів стійкості для систем РА з запізненням.
17. Яка статична система РА буде стійкою в розімкненому стані?
18. Чим відрізняються абсолютно стійкі та умовно стійкі системи РА?

6 ПОКАЗНИКИ ЯКОСТІ РОБОТИ СИСТЕМ РАДІОАВТОМАТИКИ

6.1 Загальна характеристика показників якості

При аналізі якості роботи систем РА виходять з того, що структурна схема та параметри пристроїв системи відомі. Потрібно оцінити якість роботи такої системи. Разом зі стійкістю системи РА оцінюються рядом якісних показників, основними з яких є точність роботи, характер перехідного процесу та частотні властивості. Показники якості роботи залежать не тільки від характеристик системи РА, але і від властивостей та характеристик сигналів, що діють в системі. Відомо, що на систему РА разом з керувальними (корисними) сигналами діють збуджувальні сигнали (завади), які погіршують точність її роботи. Наприклад, в багатьох системах РА (АПЧ, АРП, системах стеження) зміна температури навколишнього середовища, відхилення напруг джерел живлення від номінальних значень, шуми активних елементів і т.і. є збуджувальними діями (завадами).

Закони зміни корисних сигналів та завад на практиці не є відомими наперед, тому якість роботи систем РА визначається за допомогою непрямих ознак, які носять назву показників якості роботи системи.

За реакцією системи РА на функцію включення $1(t)$ роблять висновок про показники якості перехідного процесу та статичні помилки системи.

Динамічна помилка роботи системи РА оцінюється за сигналом вигляду

$$X(t) = \sum_{k=0}^N \alpha_k t^k. \quad (6.1)$$

Частотні показники якості роботи системи РА визначаються при гармонічному вхідному сигналі. Якість роботи систем РА відносно випадкових сигналів та завад характеризується за сумарною середньоквадратичною помилкою.

В системах стабілізації вхідний сигнал є сталою величиною, тому основними показниками якості таких систем є характеристики перехідного процесу та сумарна середньоквадратична помилка. Якість роботи систем стеження, вхідний сигнал яких є випадковою функцією, оцінюється не тільки за перехідним процесом, але і за частотними характеристиками, динамічною точністю роботи та сумарною середньоквадратичною помилкою.

Для оцінки якості роботи систем РА також використовуються непрямі методи.

Такі методи базуються на обчисленні інтегральних оцінок. Широко використовується квадратична інтегральна оцінка

$$J = \int_0^{\infty} \left\{ E^2(t) + \alpha_1 \dot{E}^2(t) + \alpha_2 \ddot{E}^2(t) + \dots + \alpha_k [E^{(k)}(t)]^2 + \dots + \alpha_N [E^{(N)}(t)]^2 \right\} dt, \quad (6.2)$$

де $E(t)$ – сигнал розузгодження (помилка системи), який дорівнює різниці вхідного $X(t)$ та вихідного $Y(t)$ сигналів (при одиничному від'ємному зворотному зв'язку); α_k – сталі коефіцієнти.

Таким чином, якість роботи систем РА визначається інтегральною оцінкою (6.2). Чим менше її значення, тим вище якість роботи системи і навпаки. Змінюючи значення коефіцієнтів α_k , можна змінювати вплив на інтегральну оцінку похідних від помилки системи. Однак використання інтегральних оцінок призводить до виникнення ряду труднощів:

– за значенням інтегральної оцінки не можна робити висновок про показники якості та точність роботи системи РА;

– труднощі обчислення інтегралу (6.2).

6.2 Показники якості в усталеному режимі

Основним показником якості в усталеному режимі є точність реалізації заданого алгоритму роботи системи РА. Кількісно він характеризується статичною помилкою

$$\Delta U_{\text{вих.}i} = U_{\text{вих.}i} - U_{\text{вих.зад}} \quad (6.3)$$

та відносною похибкою

$$\delta U_{\text{вих.}i} = \frac{\Delta U_{\text{вих.}i}}{U_{\text{вих.зад}}} = \frac{U_{\text{вих.}i} - U_{\text{вих.зад}}}{U_{\text{вих.зад}}} = \frac{U_{\text{вих.}i}}{U_{\text{вих.зад}}} - 1, \quad (6.4)$$

де $U_{\text{вих.}i}$ – значення вихідного сигналу системи РА при i -му значенні вхідного сигналу або в i -ий момент часу; $U_{\text{вих.зад}}$ – задане значення вихідного сигналу системи.

Для системи стабілізації статичні характеристики (ідеальна – суцільною лінією, реальна – пунктирною лінією) та статична помилка наведенні на рис.6.1.

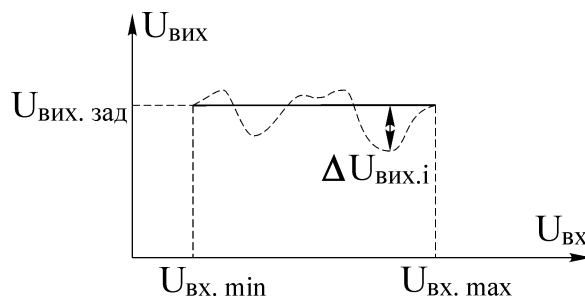


Рисунок 6.1 – Статичні характеристики системи стабілізації

Статична помилка відноситься до розряду систематичної, тому що закон її зміни відомий. Це означає, що така помилка або має стале значення,

або змінюється за заздалегідь відомим законом, що полегшує боротьбу зі статичними помилками. За походженням статичні помилки бувають двох видів:

- методичні, що обумовлені вибраним принципом побудови системи РА;
- інструментальні (завади, невідповідність деяких елементів системи їх номінальним значенням), що обумовлені недосконалістю технології, старінням елементів, впливом зовнішніх факторів і т.і.

6.3 Визначення статичних помилок для розімкнених та замкнених систем

Розглянемо розімкнену систему РА, структурна схема якої наведена на рис.6.2.

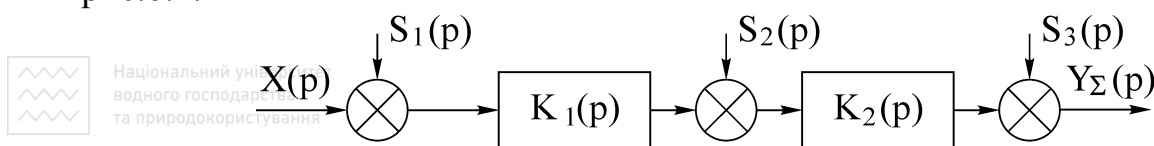


Рисунок 6.2 – Структурна схема розімкненої системи РА

Для ідеальної розімкненої системи РА (без збуджувальних дій) при $S_1(p) = S_2(p) = S_3(p) = 0$ вихідний сигнал запишемо у вигляді

$$Y(p) = K_{\text{екв}}(p)X(p) = K_1(p)K_2(p)X(p).$$

Однак для реальної розімкненої системи РА вихідний сигнал визначається таким чином:

$$Y_{\Sigma}(p) = Y(p) \pm \Delta Y_{\Sigma}(p) = Y(p) \pm \Delta Y_{S_1}(p) \pm \Delta Y_{S_2}(p) \pm \Delta Y_{S_3}(p), \quad (6.5)$$

де $\Delta Y_{S_1}(p) = K_{\text{екв}}(p)S_1(p) = K_1(p)K_2(p)S_1(p)$; $\Delta Y_{S_2}(p) = K_2(p)S_2(p)$; $\Delta Y_{S_3}(p) = S_3(p)$.

Таким чином, розімкнені системи РА є найменш точними, тому що статичні помилки в них мають найбільше значення. На практиці такі системи не використовуються.

Далі розглянемо замкнену систему РА, структурна схема якої наведена на рис.6.3.

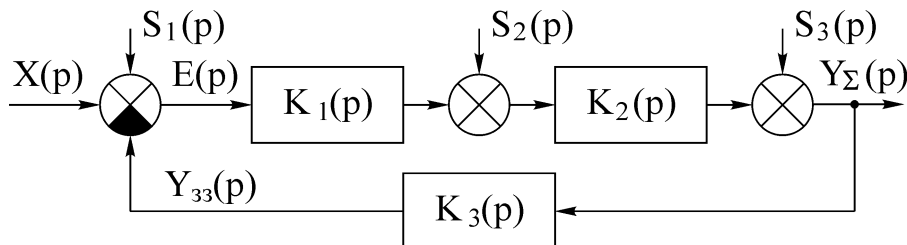


Рисунок 6.3 – Структурна схема замкненої системи РА

Для ідеальної замкненої системи РА (без збуджувальних дій) при $S_1(p) = S_2(p) = S_3(p) = 0$ вихідний сигнал запишеться у вигляді

$$Y(p) = \frac{K_1(p)K_2(p)}{1 + K_1(p)K_2(p)K_3(p)} X(p) = K_{\text{екв}}(p) X(p).$$

Однак для реальної замкненої системи РА вихідний сигнал визначається співвідношенням (6.5). Кожна з складових помилки може мати як систематичний, так і випадковий характер. Тому при аналізі лінійних систем можна використовувати принцип суперпозиції. Тоді

$$\Delta Y_{S_1}(p) = K_{\text{екв}}(p) S_1(p) = \frac{K_1(p)K_2(p)}{1 + K_1(p)K_2(p)K_3(p)} S_1(p);$$

$$\Delta Y_{S_2}(p) = \frac{K_{\text{екв}}(p)}{K_1(p)} S_2(p) = \frac{K_2(p)}{1 + K_1(p)K_2(p)K_3(p)} S_2(p);$$

$$\Delta Y_{S_3}(p) = \frac{K_{\text{екв}}(p)}{K_1(p)K_2(p)} S_3(p) = \frac{1}{1 + K_1(p)K_2(p)K_3(p)} S_3(p).$$

Таким чином, порівнявши значення статичних помилок $\Delta Y_{S_i}(p)$ для розімкнених та замкнених систем, можна зробити висновок, що при переході від розімкненої системи до замкненої статичні помилки зменшуються в $1 + \prod_{i=1}^N K_i(p)$ разів (при від'ємному зворотному зв'язку). Позитивний зворотний зв'язок збільшує відповідні складові у $\frac{1}{1 - \prod_{i=1}^N K_i(p)}$ разів. Крім того, слід

відзначити, що чим ближче до виходу системи потрапляє завада $S(p)$, тим меншою є викликана нею складова статичної помилки (при $K_i(p) > 1$).

6.4 Способи зменшення та виключення статичних помилок

В теорії автоматичного управління виділяють чотири напрямки зменшення або виключення статичних помилок.

1. Перехід від розімкненої системи до замкненої, що призводить до зменшення різних дестабілізуювальних впливів в $1 + \prod_{i=1}^N K_i(p)$ разів.

2. Збільшення добутку $1 + \prod_{i=1}^N K_i(p)$, але це може призвести до втрати стійкості. Тому необхідно дотримуватися вимоги $1 + \prod_{i=1}^N K_i(p) < \left[\prod_{i=1}^N K_i(p) \right]_{\text{кр}}$.

3. Перехід від статичної системи РА до астатичної.

Такий напрямок визначається способом побудови системи та властивостями її окремих кіл. Якщо кола системи РА статичні, то в усталеному ре-

жимі спостерігається стала крутизна статичної характеристики $K_{\text{екв}}(p)|_{p=0} = K_{\text{екв}}$. Тоді, наприклад, для системи РА, структурна схема якої наведена на рис.6.3, маємо:

$$\begin{aligned}\Delta Y_{S_1}(p) &= \frac{K_1(p)K_2(p)}{1 + K_1(p)K_2(p)K_3(p)} S_1(p)|_{p=0} = \frac{K_1 K_2}{1 + K_1 K_2 K_3} S_1 \neq 0; \\ \Delta Y_{S_2}(p) &= \frac{K_2(p)}{1 + K_1(p)K_2(p)K_3(p)} S_2(p)|_{p=0} = \frac{K_2}{1 + K_1 K_2 K_3} S_2 \neq 0; \\ \Delta Y_{S_3}(p) &= \frac{1}{1 + K_1(p)K_2(p)K_3(p)} S_3(p)|_{p=0} = \frac{1}{1 + K_1 K_2 K_3} S_3 \neq 0,\end{aligned}$$

тобто для статичної системи в кінці циклу регулювання помилка не буде дорівнювати нулю.

Будемо вважати, що в якості кола від'ємного зворотного зв'язку використовується ідеальне диференціальне коло. Тоді

$$\begin{aligned}\Delta Y_{S_1}(p) &= \frac{K_1(p)K_2(p)}{1 + K_1(p)K_2(p)p\tau} S_1(p)|_{p=0} = K_1 K_2 S_1 \neq 0; \\ \Delta Y_{S_2}(p) &= \frac{K_2(p)}{1 + K_1(p)K_2(p)p\tau} S_2(p)|_{p=0} = K_2 S_2 \neq 0; \\ \Delta Y_{S_3}(p) &= \frac{1}{1 + K_1(p)K_2(p)p\tau} S_3(p)|_{p=0} = S_3 \neq 0,\end{aligned}$$

тобто включення ідеального диференціального кола в якості кола від'ємного зворотного зв'язку не тільки не виключає статичні помилки, але й призводить до їх збільшення.

Якщо $K_1(p) = p\tau$, то $Y_{S_1} = 0$, $Y_{S_2} = K_2 S_2 \neq 0$, $Y_{S_3} = S_3 \neq 0$, а якщо $K_2(p) = p\tau$, то $Y_{S_1} = 0$, $Y_{S_2} = 0$, $Y_{S_3} = S_3 \neq 0$, тобто включення ідеального диференціального кола в коло прямої передачі замкненої системи РА призводить до виключення складових статичної помилки, які потрапили в систему до ідеального диференціального кола. Аналогічна ситуація спостерігається і при використанні інерційного диференціального кола.

Якщо в якості кола від'ємного зворотного зв'язку використовується ідеальне інтегровальне коло, то

$$\begin{aligned}\Delta Y_{S_1}(p) &= \frac{K_1(p)K_2(p)}{1 + \frac{p\tau}{K_1(p)K_2(p)}} S_1(p) = \frac{K_1(p)K_2(p)p\tau}{p\tau + K_1(p)K_2(p)} S_1(p)|_{p=0} = 0; \\ \Delta Y_{S_2}(p) &= \frac{K_2(p)}{1 + \frac{p\tau}{K_1(p)K_2(p)}} S_2(p) = \frac{K_2(p)p\tau}{p\tau + K_1(p)K_2(p)} S_2(p)|_{p=0} = 0;\end{aligned}$$

$$\Delta Y_{S_3}(p) = \frac{1}{1 + \frac{K_1(p)K_2(p)}{p\tau}} S_3(p) = \frac{p\tau}{p\tau + K_1(p)K_2(p)} S_3(p) \Big|_{p=0} = 0,$$

тобто включення ідеального інтегрувального кола в якості кола від'ємного зворотного зв'язку зводить до нуля статичні помилки замкненої системи. Аналогічного результату можна досягти і при використанні ідеального інтегрувального кола в якості будь-якого з кіл прямої передачі системи РА. Крім ідеального інтегрувального кола для виключення статичних похибок можна використовувати інерційне інтегрувальне коло та ізодромне коло.

Таким чином, введення в астатичну систему хоча б одного інтегратора виключає статичні помилки, тобто статична система перетворюється в астатичну. Для астатичних системи РА, які мають статичну помилку, використовується метод підвищення астатизму хоча б на один порядок шляхом введення додаткових інтеграторів. Наприклад, астатичну систему з астатизмом першого порядку перетворюють в астатичну систему з астатизмом другого порядку і т. і.

4. Використання комбінованого принципу управління (принципу інваріантності).

Реалізація такого принципу управління потребує включення додаткового контуру та додаткових кіл (другий розрізнявач та коло з передаточною функцією $K_5(p)$ на рис.6.4). Розглянемо приклад абсолютної інваріантності, тобто незалежність помилки системи $\Delta Y_S(p)$ від завади $S(p)$.

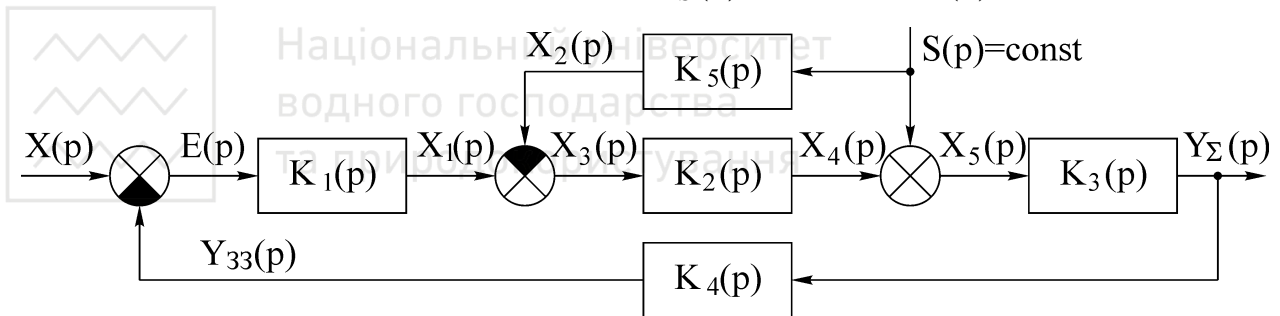


Рисунок 6.4 – Структурна схема інваріантної системи РА

При знаходженні умови абсолютної інваріантності системи РА до завади $S(p)$ необхідно знайти таке значення передаточної функції кола додаткового контуру $K_5(p)$, при якому значення статичної помилки $\Delta Y_S(p)$ дорівнює нулю. Знайдемо рівняння, яке визначає співвідношення для статичної помилки системи РА:

$$\begin{aligned}\Delta Y_S(p) &= K_3(p)X_5(p) = K_3(p)S(p) + K_3(p)X_4(p) = K_3(p)S(p) + \\ &+ K_2(p)K_3(p)X_3(p) = K_3(p)S(p) + K_2(p)K_3(p)X_1(p) - \\ &- K_2(p)K_3(p)X_2(p) = K_3(p)S(p) + K_1(p)K_2(p)K_3(p)E(p) - \\ &- K_2(p)K_3(p)K_5(p)S(p) = K_3(p)S(p)[1 - K_2(p)K_5(p)] + \\ &+ K_1(p)K_2(p)K_3(p)[X(p) - Y_{33}(p)] = K_3(p)S(p)[1 - K_2(p)K_5(p)] - \\ &- K_1(p)K_2(p)K_3(p)K_4(p)\Delta Y_S(p).\end{aligned}$$

З останнього співвідношення можна отримати передаточну функцію розглянутої системи РА для завади у вигляді

$$\Delta Y_S(p) = \frac{K_3(p)[1 - K_2(p)K_5(p)]}{1 + K_1(p)K_2(p)K_3(p)K_4(p)}S(p) = K_{\text{зав}}(p)S(p).$$

Помилки системи РА $\Delta Y_S(p)$ від дії завади $S(p)$ буде дорівнювати нулю лише в тому випадку, коли передаточна функція системи для завади $K_{\text{зав}}(p)$ буде дорівнювати нулю, тобто при виконанні умови

$$K_2(p)K_5(p) = 1 \quad \text{або} \quad K_5(p) = \frac{1}{K_2(p)}. \quad (6.6)$$

Останнє співвідношення і є умовою абсолютної інваріантності для розглянутої системи.

При дії на досліджувану систему РА завад, які змінюються за деяким більш складним законом ($S(t) = S_0 t$ або $S(t) = 0,5 S_0 t^2$), відповідно ускладнюються і методи боротьби з такими завадами (ми розглядали заваду $S(t) = S_0 = \text{const}$). Якщо характер зміни завади $S(t)$ носить випадковий характер, то для аналізу помилок використовується апарат теорії ймовірності та математичної статистики. У випадку нормального закону зміни спектральної густини завади розроблені методи синтезу систем за критерієм мінімуму середньоквадратичної помилки.

6.5 Показники якості перехідного процесу

На перехідні процеси в системах РА накладаються визначені обмеження, пов'язані з особливостями роботи системи. Наприклад, в системах автоматичного супроводження цілі РЛС не можна допускати великих кутів відхилення антени від усталеного значення, тому що може відбутися зрив супроводження цілі. Для підвищення надійності роботи механічних вузлів обмежується кількість коливань антени в перехідному процесі.

До основних показників якості перехідного процесу в системі РА відносяться такі параметри (рис.6.5):

1) тривалість перехідного процесу t_{Π} , яка дорівнює інтервалу часу від моменту подачі сигналу до моменту часу, коли вихідний сигнал буде відрізнятися від свого усталеного значення $h_{\text{уст}}$ не більше, ніж на 5%;

2) перше перерегулювання γ_1 , яке дорівнює відношенню максимального значення вихідного сигналу в перехідному процесі до усталеного значення, тобто $\gamma_1 = \frac{h_{\max}}{h_{\text{уст}}}$;

3) час встановлення першого максимуму вихідного сигналу $t_{\text{вст}}$, який характеризує швидкість зміни вихідного сигналу в перехідному процесі;

4) частота коливань в перехідному процесі $\omega_p = \frac{2\pi}{T_\Pi}$, де T_Π – період коливань кривої перехідного процесу;

5) кількість перерегулювань або ступінь коливальності перехідного процесу за час t_Π (норма – $2 \div 3$ перерегулювання), яка залежить від того, на яку ділянку ЛАЧХ приходить частота зрізу;

6) логарифмічний декремент згасання системи d_c , який характеризує швидкість згасання коливального процесу:

$$d_c = \ln \frac{h_{i.\max}}{h_{i+1.\max}},$$

де $h_{i.\max}$ та $h_{i+1.\max}$ – дві амплітуди поряд розташованих екстремумів кривої перехідного процесу. Чим більший логарифмічний декремент згасання, тим швидше відбувається згасання перехідного процесу;

7) максимальна швидкість обробки вхідного сигналу $\left. \frac{dh(t)}{dt} \right|_{\max}$.

Характер протікання процесів в системах РА можна розділити на чотири групи:

– коливальний процес, який характеризується декількома значеннями перерегулювань, які перевищують 5% зони усталеного значення;

– перехідний процес з одним перерегулюванням;

– монотонний процес, коли швидкість зміни регульованої величини не змінює знака протягом всього часу t_Π , тобто $\frac{dh(t)}{dt} \geq 0$ при $0 \leq t \leq t_\Pi$;

– процес без перерегулювання, коли $h(t) < h(\infty)$ з точністю до деякого малого значення Δ для всіх значень t .

Рекомендовані значення першого перерегулювання γ_1 , отримані на основі досвіду експлуатації систем РА, складають величину $(10 \div 30)\%$.

Для знаходження кривої перехідного процесу використовуються аналітичні методи або вона визначається за допомогою ЕОМ.

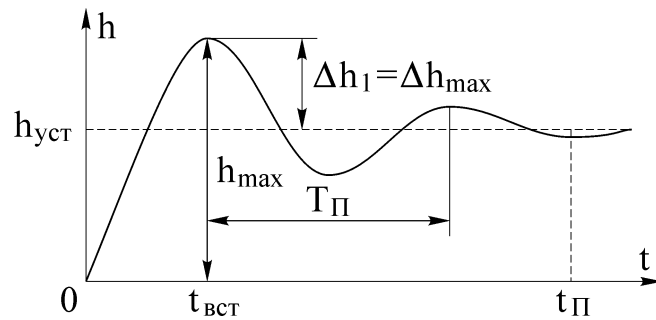


Рисунок 6.5 – До оцінки показників перехідних процесів системи РА

Усталене значення вихідного сигналу системи $h_{уст}$ обчислюється за теоремою про кінцеве значення. При одиничному вхідному сигналі

$$h_{уст} = \lim_{p \rightarrow 0} p K_{зам}(p) \frac{1}{p} = K_{зам}(0),$$

де $K_{зам}(p)$ – передаточна функція замкненої системи РА.

В астатичних системах РА усталене значення вихідного сигналу в перехідному процесі дорівнює одиниці, а в статичних системах $-\frac{K_{екв}}{1 + K_{екв}}$.

Якщо сигнал на вході системи відрізняється від одиниці, то в перехідному процесі змінюється тільки масштаб вихідного сигналу.

6.6 Способи оцінки показників якості перехідних процесів

Способи оцінки показників якості перехідних процесів діляться на прямі (безпосередні) та непрямі. Прямі базуються на наявності кривої перехідного процесу, отриманої або аналітично, або експериментально. Непрямі методи не потребують наявності кривої перехідного процесу.

Непрямі методи оцінки діляться на три групи.

1. Кореневі методи дозволяють порівняти декілька систем за коливальністю та тривалістю перехідного процесу, використовуючи корені характеристичного рівняння системи. В тій системі, де модуль дійсної частини кореня характеристичного рівняння буде мати мінімальне значення, спостерігається найбільш затягнутий перехідний процес, тобто максимальне значення t_{Π} . Найгірша коливальність буде в системі, у якій уявна частина кореня характеристичного рівняння має найбільше значення. Таким чином, дійсна частина кореня характеристичного рівняння відповідає за тривалість перехідного процесу, а уявна – за частоту коливань.

2. Частотні методи оцінки засновані на тому, що між частотними та часовими характеристиками систем РА існує однозначний взаємозв'язок (рис.6.6). Тому за частотними характеристиками замкнених та розімкнених систем РА можна оцінювати показники якості перехідного процесу.

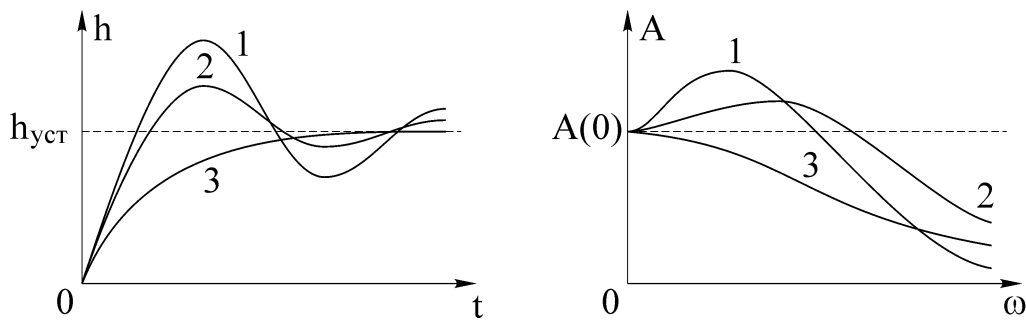


Рисунок 6.6 – До визначення взаємозв'язку між часовими та частотними характеристиками систем РА

Частотні показники якості роботи систем РА визначаються за АЧХ замкненої системи (рис.6.7). Значення цієї характеристики на нульовій частоті дорівнює одиниці для астатичних систем та $\frac{K_{\text{екв}}}{1 + K_{\text{екв}}}$ для статичних систем

РА. Тому для зручності АЧХ статичних систем нормується, тобто її значення діляться на початкове значення $A(0)$, тобто в цьому випадку АЧХ статичних систем також починається з одиниці.

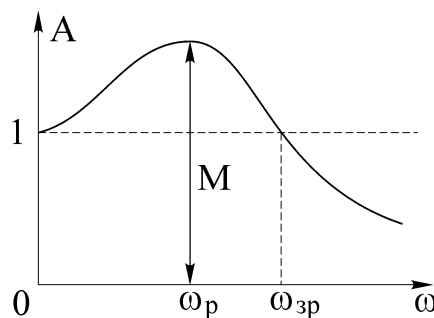


Рисунок 6.7 – АЧХ замкненої системи РА

До частотних показників якості роботи систем РА відносяться такі параметри:

1) смуга пропускання $\Delta\omega = \omega_{\text{пр}}$ – діапазон частот, в якому АЧХ більше або дорівнює одиниці (якщо АЧХ замкненої системи РА в усьому діапазоні частот менше одиниці, то смугу пропускання визначають на рівні 0,707);

2) резонансна частота ω_p – частота, що відповідає максимуму АЧХ замкненої системи та характеризує частоту коливань в перехідному процесі;

3) показник коливальності $M = \frac{A(\omega_p)}{A(0)}$ – максимальне значення АЧХ

замкненої системи (на практиці бажано, щоб показник коливальності не перевищував двох).

Розглянемо деякі наближені співвідношення, які встановлюють зв'язок між параметрами частотних характеристик замкнених та розімкнених систем та дозволяють оцінити частотні показники якості роботи систем РА без побудови АЧХ замкнених систем.

Частотні характеристики замкненої та розімкненої систем зв'язані співвідношенням (при одиничному від'ємному зворотному зв'язку)

$$K_{\text{зам}}(j\omega) = \frac{K_{\text{роз}}(j\omega)}{1 + K_{\text{роз}}(j\omega)} = \left[1 + \frac{1}{|K_{\text{роз}}(j\omega)|} e^{-j\varphi_{\text{роз}}(\omega)} \right]^{-1},$$

де $|K_{\text{роз}}(j\omega)| = A_{\text{роз}}(\omega)$ та $\varphi_{\text{роз}}(\omega)$ – відповідно АЧХ та ФЧХ розімкненої системи РА.

З останнього співвідношення

$$A_{\text{зам}}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{A_{\text{роз}}^2(\omega)} + \frac{2}{A_{\text{роз}}(\omega)} \cos \varphi_{\text{роз}}(\omega)}}; \quad (6.7)$$

$$\varphi_{\text{зам}}(\omega) = -\arctg \frac{\sin \varphi_{\text{роз}}(\omega)}{A_{\text{роз}}(\omega) + \cos \varphi_{\text{роз}}(\omega)}, \quad (6.8)$$

або при $\gamma(\omega) = -180^\circ - \varphi_{\text{роз}}(\omega)$

$$A_{\text{зам}}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{A_{\text{роз}}^2(\omega)} - \frac{2}{A_{\text{роз}}(\omega)} \cos \gamma(\omega)}}; \quad (6.9)$$

$$\varphi_{\text{зам}}(\omega) = \arctg \frac{\sin \gamma(\omega)}{A_{\text{роз}}(\omega) - \cos \gamma(\omega)}. \quad (6.10)$$

З співвідношень (6.7) ÷ (6.10) виходить, що в діапазоні частот, для якого $A_{\text{роз}}(\omega) > 1$, АЧХ замкненої системи приблизно дорівнює одиниці, а ФЧХ майже не відрізняється від нуля. В діапазоні частот, для якого $A_{\text{роз}}(\omega) \leq 1$, частотні характеристики $A_{\text{зам}}(\omega)$ та $\varphi_{\text{зам}}(\omega)$ збігаються з частотними характеристиками розімкненої системи.

На частоті зрізу, яка дорівнює смузі пропускання, АЧХ замкненої системи дорівнює одиниці. Тоді з співвідношення (6.9)

$$A_{\text{роз}}(\omega_{\text{зр}}) = \frac{1}{2 \cos \gamma(\omega_{\text{зр}})}. \quad (6.11)$$

В діапазоні частоти зрізу ЛАЧХ розімкненої системи має нахил -20 дБ/дек. Тому ФЧХ в цьому діапазоні змінюється незначно та можна прийняти $\gamma(\omega_{\text{зр}}) \approx \gamma$. Тоді останнє співвідношення можна записати у вигляді

$$A_{\text{роз}}(\omega_{\text{зр}}) \approx \frac{1}{2 \cos \gamma}.$$

Значення показника коливальності системи РА можна визначити, якщо досліджувати на максимум співвідношення (6.9). В діапазоні частот, в якому

розташована резонансна частота, ФЧХ розімкненої системи змінюється незначно і приблизно дорівнює значенню цієї характеристики на частоті зрізу. Тому для знаходження максимуму співвідношення (6.9) можна продиференціювати це співвідношення за $A_{\text{роз}}(\omega)$ та прирівняти до нуля. В результаті от-

римаємо, що максимум АЧХ замкненої системи буде при $A_{\text{роз}}(\omega) = \frac{1}{\cos \gamma}$.

Підставивши цей результат в співвідношення (6.9), знайдемо, що показник коливальності M зв'язаний з запасом стійкості за фазою γ співвідношенням

$$M = -\frac{1}{\sin \gamma}. \quad (6.12)$$

Використання показника коливальності як показника якості перехідного процесу особливо ефективно при синтезі систем РА з використанням ЛАЧХ. Як показано в [8], проектована система буде мати заданий показник коливальності M , якщо довжина асимптоти ЛАЧХ, що перетинає вісь частот, дорівнює

$$l = \frac{\omega_{i+1}}{\omega_i} = \frac{M+1}{M-1}, \quad (6.13)$$

при цьому положення цієї асимптоти відносно осі частот визначається ординатами $L_i = 20 \lg \frac{M-1}{M}$ та $L_{i+1} = 20 \lg \frac{M}{M+1}$.

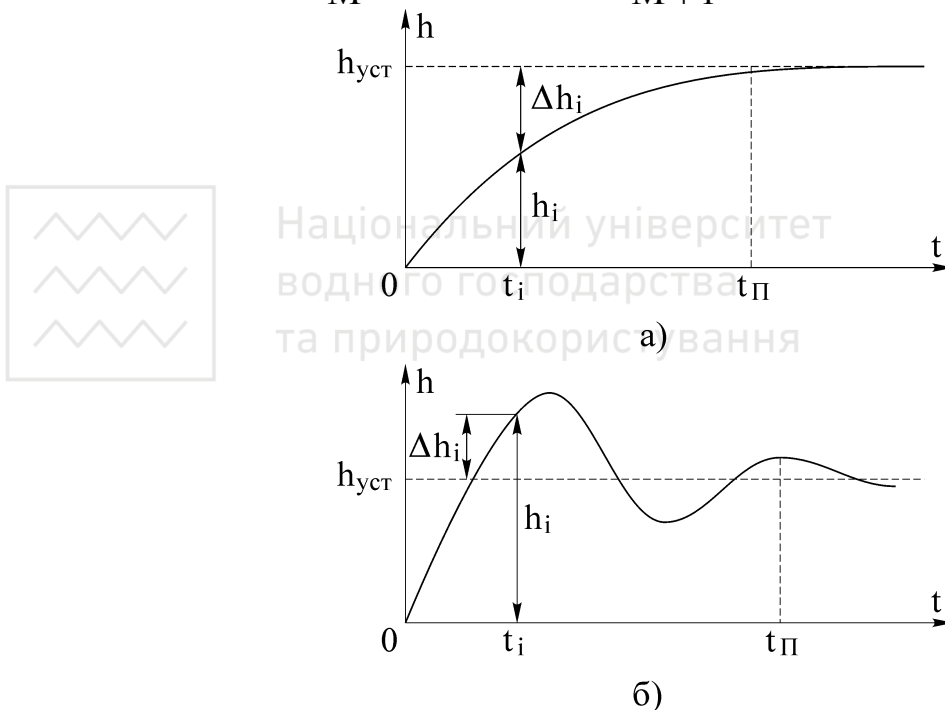


Рисунок 6.8 – До визначення інтегральної оцінки показників якості перехідного процесу

3. Інтегральні методи оцінки базуються на наявності кривої перехідного процесу. Для визначення інтегральної оцінки необхідно для кожної точки

t_i перехідної характеристики в часовому інтервалі $0 \div t_{\Pi}$ визначити різницю $\Delta h_i = h_{уст} - h_i$ (рис.6.8).

Для аперіодичної кривої перехідного процесу (рис.6.8, б) інтегральна оцінка визначається співвідношенням $J = \int_0^{t_{\Pi}} \Delta h_i dt$, а для коливальної кривої перехідного процесу (рис.6.8, б) – співвідношенням $J = \int_0^{t_{\Pi}} \Delta h_i^2 dt$.

Система РА, інтегральна оцінка якої буде мати найменше значення, має найкращі показники якості перехідного процесу.

Інтегральний метод оцінки показників якості перехідного процесу носить назву непрямого, тому що інтеграл обчислюється на основі перехідної характеристики або передаточної функції досліджуваної системи РА.

6.7 Оцінка перехідних процесів за видом дійсних частотних характеристик

Для визначення дійсних та уявних частотних характеристик за амплітудно – фазовими характеристиками скористаємось комплексною частотною характеристикою замкненої системи

$$K_{зам}(j\omega) = \frac{K_{роз}(j\omega)}{1 + K_{роз}(j\omega)K_{зз}(j\omega)} = P(\omega) + jQ(\omega),$$

де $P(\omega)$ та $Q(\omega)$ – відповідно дійсна та уявна частотні характеристики замкненої системи РА.

Комплексну частотну характеристику розімкненої системи РА представимо у вигляді

$$K_{роз}(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega),$$

де $U(\omega)$ та $V(\omega)$ – відповідно дійсна та уявна частотні характеристики замкненої системи РА.

В результаті для випадку $K_{зз}(j\omega) = 1$ отримаємо

$$K_{зам}(j\omega) = \frac{U(\omega) + jV(\omega)}{1 + U(\omega) + jV(\omega)},$$

звідки після нескладних перетворень знайдемо:

$$\begin{cases} P(\omega) = \frac{U(\omega)[1 + U(\omega)] + V^2(\omega)}{[1 + U(\omega)]^2 + V^2(\omega)}, \\ Q(\omega) = \frac{V(\omega)}{[1 + U(\omega)]^2 + V^2(\omega)}. \end{cases}$$

Перехідний процес в системі РА виражається через дійсну частотну характеристику замкненої системи $P(\omega)$ співвідношенням

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} P(\omega) \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega. \quad (6.14)$$

На основі співвідношення (6.14) можна зробити висновок, що різним дійсним частотним характеристикам відповідають різні перехідні процеси. Відзначимо декілька властивостей дійсних частотних характеристик, які дозволяють оцінити показники якості систем РА. Частина з цих властивостей доводиться точно, а інші базуються на розрахунково – експериментальних даних, тому їх використання для оцінки показників якості в деяких випадках потребує безпосередньої перевірки (побудови кривої перехідного процесу).

Властивість 1. *Зміна масштабу по осі ординат.* Якщо змінити масштаб по осі ординат дійсної частотної характеристики в n разів, то масштаб кривої перехідного процесу зміниться в таку саму кількість разів. Для доведення цієї властивості достатньо домножити праву та ліву частини рівняння (6.14) на n :

$$h(t) \cdot n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} n P(\omega) \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega. \quad (6.15)$$

Властивість 2. *Зміна масштабу по осі абсцис.* Якщо збільшити (або зменшити) в n разів масштаб аргументу дійсної частотної характеристики, то масштаб кривої перехідного процесу зменшиться (збільшиться) в ту саму кількість разів.

Позначимо перехідний процес, обумовлений зміною масштабу аргументу ω в n разів, через $h'(t)$. Цей процес задовольняє співвідношення

$$h'(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} P(n\omega) \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega. \quad (6.16)$$

Введемо нову змінну $\omega' = n\omega$, тоді

$$h'(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} P(\omega') \frac{\sin \frac{\omega' t}{n}}{\omega'} d\omega'. \quad (6.17)$$

З останнього співвідношення з врахуванням (6.14) $h'(t) = h\left(\frac{t}{n}\right)$; тоді

$$h\left(\frac{t}{n}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} P(n\omega) \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega. \quad (6.18)$$

Властивість 3. *Усталене значення перехідного процесу.* Згідно з теоремою про кінцеве значення маємо

$$h(\infty) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \omega h(j\omega). \quad (6.19)$$

Для прийнятої одиничної вхідної дії отримаємо

$$h(j\omega) = \frac{K_{\text{зам}}(j\omega)}{j\omega}. \quad (6.20)$$

Підставивши співвідношення (6.20) в формулу (6.19), знайдемо

$$h(\infty) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \omega K_{\text{зам}}(j\omega). \quad (6.21)$$

При цьому дійсна частина комплексної частотної характеристики дорівнює $P(0)$, а її уявна частини $Q(0)$; тому з співвідношення (6.21) виходить, що

$$h(\infty) = P(0). \quad (6.22)$$

Властивість 4. Початкове значення перехідного процесу. Як відомо, порядок чисельника комплексної передаточної функції замкненої системи $K_{\text{зам}}(j\omega)$ завжди менше порядку знаменника. Тому

$$h(0) = P(\infty) = 0. \quad (6.23)$$

Якщо в передаточній функції системи РА для помилки $K_E(j\omega)$ порядок чисельника дорівнює порядку знаменника, то

$$E(0) = P_E(\infty) = 1. \quad (6.24)$$

Властивість 5. Максимум перерегулювання при дійсній частотній характеристиці, яка зі збільшенням частоти зменшує свої значення. Дійсна частотна характеристика на інтервалі позитивності $[0, \omega_{\Pi}]$ задовольняє умови $P(\omega) \geq 0$ та $\frac{dP(\omega)}{d\omega} \leq 0$. Представимо вихідний сигнал у вигляді суми

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} P(\omega) \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega + \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} P(\omega) \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega + \dots \quad (6.25)$$

Відомо, що сума знакозмінного ряду (6.25), що сходиться, не може перевищувати значення його першого члена. Тому

$$h(t) \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} P(\omega) \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega. \quad (6.26)$$

Останню нерівність можна підсилити, якщо замість $P(\omega)$ підставити $P(0)$

$$h(t) \leq \frac{2}{\pi} P(0) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega. \quad (6.27)$$

Введемо нову змінну $\omega t = y$ та $d\omega = dy/t$. Тоді нерівність (6.27) можна

переписати у вигляді

$$h(t) \leq \frac{2}{\pi} P(0) \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{y} dy, \quad (6.28)$$

звідки

$$h(t) \leq \frac{2P(0)}{\pi} \cdot 1.85 = \frac{3.7}{\pi} h(\infty). \quad (6.29)$$

Визначимо

$$h(t) - h(\infty) < \left(\frac{3.7}{\pi} - 1 \right) h(\infty); \quad (6.30)$$

тоді

$$\gamma_{\max} = \frac{h(t) - h(\infty)}{h(\infty)} \cdot 100\% < \left(\frac{3.7}{\pi} - 1 \right) \cdot 100\% = 18\%. \quad (6.31)$$

Для дійсної частотної характеристики, яка має форму прямокутника, нерівність (6.31) стає рівністю.

Властивість 6. Залежність максимуму перерегулювання від піку дійсної частотної характеристики. Розглянемо дійсну частотну характеристику на інтервалі позитивності $[0, \omega_{\Pi}]$. Розіб'ємо її на дві характеристики, тобто

$$P(\omega) = P_1(\omega) - P_2(\omega), \quad (6.32)$$

де $P_1(0) = P_{\max}$.

Тоді співвідношення для визначення перехідного процесу можна представити у такому вигляді:

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} P_1(\omega) \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} P_2(\omega) \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega. \quad (6.33)$$

Другий інтеграл завжди позитивний, тобто

$$h(t) \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} P_1(\omega) \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega. \quad (6.34)$$

На основі властивості 5 запишемо

$$\frac{h(t)}{h(\infty)} < 1.18 \frac{P_{\max}}{P(0)}, \quad (6.35)$$

звідки

$$\gamma_{\max} < \frac{1.18 P_{\max} - P(0)}{P(0)} \cdot 100\%. \quad (6.36)$$

Властивість 7. Умова монотонності перехідного процесу. Сформулюємо необхідні умови в такому вигляді:

$$P(0) \geq |P(\omega)|; \quad (6.37)$$

$$\omega_P P(0) \geq 2 \int_0^{\infty} |P(\omega)| d\omega; \quad (6.38)$$

$$P(0) \cos \frac{\pi}{1 + \left[\frac{\omega_P}{\omega} \right]} \geq P(\omega), \quad (6.39)$$

де $\left[\frac{\omega_P}{\omega} \right]$ при даному значенні ω означає цілу частину числа $\frac{\omega_P}{\omega}$.

Розглянемо достатні умови. Для того, щоб перехідний процес, що визначається співвідношенням (6.14), був монотонним, достатньо мати дійсну частотну характеристику у вигляді неперервної позитивної функції від ω з від'ємною монотонною функцією $\frac{dP(\omega)}{d\omega}$, яка зменшує свої значення. Для до-

ведення цієї властивості розіб'ємо характеристику $P(\omega)$ на велику кількість прямокутних трикутникових характеристик $P_i(\omega)$. Для кожної такої характеристики можна записати

$$P_i(\omega) = P_i(0) \left(1 - \frac{\omega}{\omega_{0,i}} \right), \quad (6.40)$$

де $0 < \omega < \omega_{0,i}$.

Інтервал частот кожної попередньої дійсної частотної характеристики менше, ніж попередній, тобто $0 < \omega_{0,1} < \omega_{0,2} < \omega_{0,3} < \dots < \omega_{0,N}$.

Формулу для кожної складової перехідного процесу можна записати як

$$h_i(t) \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\omega_{0,i}} P_i(\omega) \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega. \quad (6.41)$$

Підставивши співвідношення (6.40) в формулу (6.41), після деяких перетворень отримаємо

$$h_i(t) = \frac{2}{\pi} P_{0,i} \left(\int_0^{\omega_{0,i}} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega - \frac{\cos \omega_{0,i} t - 1}{\omega_{0,i} t} \right), \quad (6.42)$$

Продиференціювавши останнє рівняння, знайдемо

$$\frac{dh_i(t)}{dt} = \frac{2P_{0,i}}{\pi t^2 \omega_{0,i}} (1 - \cos \omega_{0,i} t), \quad (6.43)$$

звідки

$$\frac{dh_i(t)}{dt} \geq 0. \quad (6.44)$$

Умова (6.44) отримана для всіх значень t . З цієї умови при $h_i(\infty) = P_i(0)$

у відповідності з теоремою про кінцеве значення слідує, що функція $h_i(t)$ монотонно збільшується та асимптотично прямує до свого усталеного значення.

Властивість 8. Тривалість перехідного процесу t_{Π} та максимум пере-регулювання γ_{\max} , коли дійсна частотна характеристика мало відрізняється від трапецевидної. Якщо неперервну дійсну частотну характеристику $P(\omega)$, яка зі збільшенням частоти зменшує своє значення, можна замінити еквівалентною трапецевидною частотною характеристикою (апроксимацію характеристики $P(\omega)$ трапеціями необхідно проводити таким чином, щоб недостатня частина площі дійсної характеристики дорівнювала збитковій частині площі характеристики; тільки в цьому випадку заміна вихідної дійсної частотної характеристики трапецевидною буде вірною) з частотами ω_0 та ω_d , то тривалість перехідного процесу буде знаходитися в межах

$$\frac{\pi}{\omega_0} < t_{\Pi} < \frac{4\pi}{\omega_0}, \quad (6.45)$$

де ω_0 та ω_d – частотні координати трапецевидної характеристики.

Властивість 9. Залежність тривалості перехідного процесу від довжини інтервалу позитивності. Якщо дійсна частотна характеристика $P(\omega) > 0$ на інтервалі $[0, \omega_{\Pi}]$, то тривалість перехідного процесу t_{Π} буде визначатися як

$$t_{\Pi} > \frac{\pi}{\omega_{\Pi}}. \quad (6.46)$$

Властивість 10. Тривалість монотонного перехідного процесу. Якщо для $P(\omega)$ виконується властивість 7, то тривалість монотонного перехідного процесу буде визначатися як

$$t_{\Pi} > \frac{4\pi}{\omega_{\Pi}}. \quad (6.47)$$

Властивість 11. Зміна перехідного процесу при зміні дійсної частотної характеристики в області високих частот. Розглянемо дві характеристики $P_1(\omega)$ та $P_2(\omega)$, які суттєво відрізняються в області високих частот. Знайдемо різницю цих двох дійсних функцій

$$\rho(\omega) = P_1(\omega) - P_2(\omega) \quad (6.48)$$

та будемо вважати, що

$$\begin{cases} \rho(\omega) = 0 & \text{при } 0 \leq \omega \leq \omega_{\Pi}; \\ |\rho(\omega)| \leq \mu & \text{при } \omega_{\Pi} \leq \omega \leq \omega_K. \end{cases}$$

Крім того, функція $\rho(\omega)$ є такою, що при $\omega \geq \omega_K$ не збільшується, тоді різниця $\varepsilon(t) = h_1(t) - h_2(t)$ обмежена знизу значенням

$$|\varepsilon(t)| \leq \frac{2\mu}{\pi} \int_{\omega_{\Pi} t}^{(K+N)\pi} \left| \frac{\sin \omega t}{\omega} \right| d\omega, \quad (6.49)$$

де $K > \frac{\omega_{\Pi} t}{\pi}$.

Інтеграл (6.49) – це функція інтегрального синуса, тому його нескладно обчислити за допомогою відповідних таблиць $\text{Si}(\omega)$.

При $N = 1$ знайдемо

$$|\varepsilon(t)| \leq \frac{2\mu}{\pi} \int_{\omega_{\Pi} t}^{(K+1)\pi} \left| \frac{\sin \omega t}{\omega} \right| d\omega, \quad (6.50)$$

З співвідношення (6.50) можна зробити такі висновки:

1) співвідношення (6.50) визначає верхню межу $|\varepsilon(t)|$ та вказує на те, що функція $\varepsilon(t)$ є такою, що монотонно зменшується;

2) оцінку t_{Π} та γ_{\max} слід проводити на інтервалі часу $t < \frac{\pi}{\omega_{\Pi}}$, тому при оцінці показників якості значення ω_{Π} , що входить в нижню межу інтегрування, слід брати менше $\frac{\pi}{\omega_{\Pi}}$;

3) величина верхньої межі для $\varepsilon(t)$ тим менша, чим більші частоти, на яких розходяться характеристики $P_1(\omega)$ і $P_2(\omega)$, та чим менша верхня межа їх різниці.

Властивість 12. *Зміна перехідного процесу при зміні дійсної частотної характеристики в області низьких частот.* Розглянемо дві характеристики $P_1(\omega)$ та $P_2(\omega)$, які суттєво відрізняються в області низьких частот та незначно відрізняються в області високих частот. Тоді

$$\varepsilon(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\omega_0} [P_1(\omega) - P_2(\omega)] \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega. \quad (6.51)$$

При $\omega t \ll 1$ $\sin \omega t \approx \omega t$, тому співвідношення (6.50) можна переписати

$$|\varepsilon(t)| \approx \frac{2}{\pi} t S, \quad \text{при } t \ll \frac{1}{\omega_{\Pi}}, \quad (6.52)$$

де

$$S = \left| \int_0^{\omega_0} [P_1(\omega) - P_2(\omega)] d\omega \right|. \quad (6.53)$$

З співвідношення (6.52) виходить, що похибка при визначенні перехідного процесу збільшується пропорційно часу t , при цьому коефіцієнт пропорційності знаходять з співвідношення (6.53).

6.8 Аналіз точності роботи систем радіоавтоматики

Точність роботи систем РА характеризується динамічними та перехідними помилками (рис.6.9).

Динамічна помилка – помилка в усталеному режимі роботи системи при дії на неї нестационарного сигналу.

Перехідна помилка – помилка при роботі системи в перехідному режимі, який виникає при відпрацюванні початкового розузгодження.

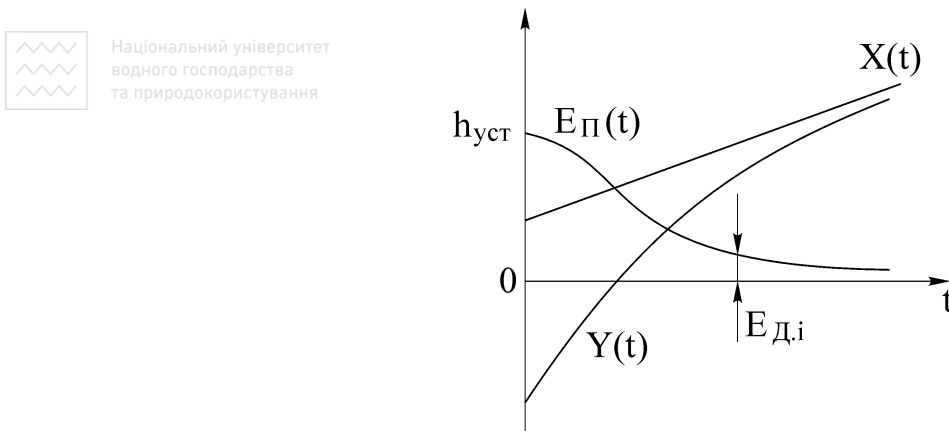


Рисунок 6.9 – До пояснення точності роботи системи РА

Динамічна точність роботи систем РА визначається для вхідних сигналів, що змінюються повільно (сигнали, кількість похідних від яких обмежена). Сигнал (6.1) відноситься до тих, що змінюються повільно, тому що кількість похідних від цього сигналу, не рівних нулю, дорівнює N , а $(N + 1)$ -а похідна дорівнює нулю. Гармонічний сигнал не є таким, що змінюється повільно, тому що кількість похідних від нього дорівнює нескінченності.

Перехідні процеси в системах РА загасають значно швидше в порівнянні зі зміною сигналу типу (6.1), тому і досягається усталений динамічний режим роботи системи.

У відповідності з визначенням передаточної функції помилки (3.15) перетворення Лапласу для помилки системи

$$E(p) = K_E(p)X(p) = \left\{ C_0 + C_1 p + \frac{1}{2} C_2 p^2 + \dots + \frac{1}{k!} C_k p^k + \dots + \frac{1}{N!} C_N p^N \right\} X(p), \quad (6.54)$$

або в області дійсного змінного

$$E(t) = C_0 X(t) + C_1 \dot{X}(t) + \frac{1}{2} C_2 \ddot{X}(t) + \dots + \frac{1}{k!} C_k X^{(k)}(t) + \dots + \frac{1}{N!} C_N X^{(N)}(t). \quad (6.55)$$

Кількість складових в останньому співвідношенні обмежена, тому що сигнал $X(t)$ є таким, що змінюється повільно. Для знаходження невідомих коефіцієнтів C_k , що носять назву коефіцієнтів помилки, відомі три способи. За першим способом ці коефіцієнти обчислюються за формулою

$$C_k = k! \left. \frac{d^k K_E(p)}{dp^k} \right|_{p=0}.$$

За другим способом коефіцієнти помилок знаходяться шляхом ділення чисельника передаточної функції помилки на її знаменник.

Найбільш зручним є третій спосіб. Передаточну функцію помилки представляють у вигляді

$$K_E(p) = \frac{b_N p^N + b_{N-1} p^{N-1} + \dots + b_k p^k + \dots + b_1 p + b_0}{a_N p^N + a_{N-1} p^{N-1} + \dots + a_k p^k + \dots + a_1 p + a_0}.$$

Перемноживши поліном знаменника останнього співвідношення на співвідношення (6.54), отримаємо

$$\begin{aligned} & \{a_N p^N + a_{N-1} p^{N-1} + \dots + a_k p^k + \dots + a_1 p + a_0\} \times \\ & \times \left\{ C_0 + C_1 p + \frac{1}{2} C_2 p^2 + \dots + \frac{1}{k!} C_k p^k + \dots + \frac{1}{(N-1)!} C_{N-1} p^{(N-1)} + \frac{1}{N!} C_N p^N \right\} = \quad (6.56) \\ & = b_N p^N + b_{N-1} p^{N-1} + \dots + b_k p^k + \dots + b_1 p + b_0. \end{aligned}$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових ступенях p лівої та правої частин співвідношення (6.56), визначимо формули для послідовного обчислення коефіцієнтів помилок. В результат знаходимо, що:

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{b_0}{a_0}; \quad C_1 = \frac{1}{a_0} (b_1 - a_1 C_0) = \frac{1}{a_0} \left(b_1 - \frac{a_1 b_0}{a_0} \right); \\ C_2 &= \frac{2}{a_0} (b_2 - a_2 C_0 - a_1 C_1) = \frac{2}{a_0} \left\{ b_2 - \frac{a_2 b_0 + a_1 b_1}{a_0} + \frac{a_1^2 b_0}{a_0^2} \right\}. \end{aligned}$$

З співвідношення (6.55) виходить, коефіцієнти помилок мають розмірність C^k .

В інженерних розрахунках коефіцієнти помилок зручно розраховувати через коефіцієнти передаточної функції розімкненої системи:

$$K_{\text{роз}}(p) = \frac{K}{p^r} \cdot \frac{d_M p^M + \dots + d_k p^k + \dots + d_1 p + d_0}{b_N p^N + \dots + b_k p^k + \dots + b_1 p + b_0}. \quad (6.57)$$

В таблиці 6.1 наведені формули для розрахунку перших трьох коефіцієнтів помилок статичних та астатичних систем РА через параметри передаточної функції (6.57).

Таблиця 6.1 – Формули для розрахунку перших трьох коефіцієнтів помилок статичних та астатичних систем РА

r	C _k	Формули для розрахунку
0	C ₀	$\frac{1}{1+K}$
	C ₁	$K \frac{b_1 - d_1}{(1+K)^2}$
	C ₂	$2K \left\{ \frac{b_2 - d_2}{(1+K)^2} + \frac{b_1(d_1 - b_1)}{(1+K)^3} + K \frac{2d_1(d_1 - b_1)}{(1+K)^3} \right\}$
1	C ₀	0
	C ₁	$\frac{1}{K}$
	C ₂	$2 \left\{ \frac{b_1 - d_1}{K} - \frac{1}{K^2} \right\}$
2	C ₀	0
	C ₁	0
	C ₂	$\frac{2}{K}$

Перша складова в співвідношенні (6.55) носить назву помилки за положенням, а коефіцієнт C₀ – коефіцієнта помилки за положенням, друга складова – помилки за швидкістю, а коефіцієнт C₁ – коефіцієнта помилки за швидкістю, третя складова – помилки за прискоренням, а коефіцієнт C₂ – коефіцієнта помилки за прискоренням і т.і.

Враховуючи особливості передаточних функцій астатичних систем РА, можна встановити, що для таких систем r перших коефіцієнтів помилок дорівнюють нулю, де r – порядок астатизму системи РА.

При аналізі роботи систем РА разом з обчисленням помилок для сигналів, що змінюються повільно, доводиться оцінювати точність і для гармонічних сигналів. В цьому випадку не можна використовувати метод коефіцієнтів помилок, тому що кількість похідних від гармонічного сигналу не обмежена. Для розрахунку помилок в цьому випадку необхідно використовувати частотні характеристики. За АЧХ обчислюється амплітуда коливань по-

милки, а за ФЧХ – фазовий зсув коливань помилки відносно гармонічного вхідного сигналу.

Приклад 6.1. Знайти динамічну помилку при вхідному сигналі $X(t) = \alpha_1 t + 0,5\alpha_2 t^2$ системи стеження, передаточна функція якої в розімкненому стані визначається співвідношенням $K_{\text{роз}}(p) = \frac{K(1 + p\tau_1)}{p(1 + p\tau_2)(1 + p\tau_3)}$.

Коефіцієнти помилок можна визначити з таблиці 6.1 для астатичної системи першого порядку ($r = 1$), тобто

$$C_0 = 0, \quad C_1 = \frac{1}{K}, \quad C_2 = 2 \left\{ \frac{\tau_2 + \tau_3 - \tau_1}{K} - \frac{1}{K^2} \right\}.$$

Тоді динамічна помилка системи у відповідності з співвідношенням (6.54)

$$E(t) = \frac{1}{K}(\alpha_1 + \alpha_2 t) + \frac{1}{K} \left(\tau_2 + \tau_3 - \tau_1 - \frac{1}{K} \right) \alpha_2 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2(\tau_2 + \tau_3 - \tau_1)}{K} - \alpha_2 \left(1 - \frac{t}{K} \right).$$

З останнього співвідношення виходить, що при збільшенні коефіцієнта підсилення системи та введення форсувального кола з передаточною функцією $K_{\text{ф}}(p) = 1 + p\tau_1$ помилка зменшується, а збільшення сталих часу інерційних кіл (τ_2 та τ_3) збільшує динамічну помилку системи РА.

6.9 Середньоквадратична помилка системи радіоавтоматики

Якість роботи систем РА при випадкових діях оцінюються за сумарною середньоквадратичною помилкою. У більшості практичних випадків закон розподілу помилки системи можна вважати нормальним (гаусовським), тому для розрахунку складових сумарної середньоквадратичної помилки достатньо врахувати математичне очікування та кореляційну функцію помилки або її спектральну густину.

Перед тим, як розглядати методи обчислення сумарної середньоквадратичної помилки, встановимо, через які передаточні функції в співвідношення для сумарної помилки входять сигнал та завада, покладаючи, що на вхід системи подається сигнал вигляду

$$F(t) = X(t) + \xi(t),$$

де $X(t)$ – випадковий сигнал; $\xi(t)$ – випадкова завада.

Сумарна помилка системи (рис.6.10) визначається як

$$E_{\Sigma}(t) = X(t) - Y(t),$$

де $Y(t)$ – вихідний сигнал систем РА.

Перетворення Лапласа для сумарної помилки дорівнює

$$E_{\Sigma}(p) = X(p) - K_{\text{зам}}(p)F(p) = K_E(p)X(p) - K_{\text{зам}}(p)\xi(p), \quad (6.58)$$

де $K_{\text{зам}}(p)$ – передаточна функція замкненої системи; $K_E(p)$ – передаточна функція досліджуваної системи для помилки; $X(p)$ та $\xi(p)$ – спектральні густини для сигналу та завади.

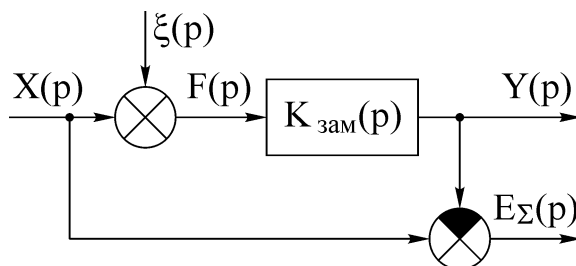


Рисунок 6.10 – До визначення сумарної середньоквадратичної помилки

З співвідношення (6.58) виходить, що сумарна помилка складається з двох складових, одна з яких, що визначає точність відтворення сигналу, залежить від передаточної функції для помилки, а друга, обумовлена дією завади, – від передаточної функції замкненої системи.

При аналізі середньоквадратичної помилки обмежимося випадком, коли сигнал і завада є стаціонарними випадковими функціями. В цьому випадку математичне очікування завжди буде дорівнювати нулю, а випадковий сигнал представимо у вигляді

$$X(t) = m_X + \tilde{X}(t),$$

де m_X – математичне очікування сигналу; $\tilde{X}(t)$ – випадкова складова сигналу.

Математичне очікування сумарної помилки розраховують за теоремою про кінцеве значення функції, тобто

$$m_E = \lim_{p \rightarrow 0} p K_E(p) m_X(p). \quad (6.59)$$

Точність системи відносно випадкових складових сигналу та завади оцінюється дисперсією помилки

$$\sigma_E^2 = M[E^2(t)] = R_E(\tau) \Big|_{\tau=0}, \quad (6.60)$$

де σ_E^2 – дисперсія помилки; σ_E – середньоквадратична помилка системи; $E(t)$ – помилка системи; M – математичне очікування від квадрату помилки; $R_E(\tau)$ – автокореляційна функція помилки.

На основі властивості ергодичності автокореляційну функцію помилки знаходять як середнє за часом від добутку випадкових складових помилки, розділених інтервалом часу τ , тобто

$$R_E(\tau) = \tilde{E}(t)\tilde{E}(t + \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \tilde{E}(t)\tilde{E}(t + \tau) dt, \quad (6.61)$$

де $\tilde{E}(t) = \tilde{X}(t) - \tilde{Y}(t)$ – випадкова складова сумарної помилки.

Згідно з теоремою згортки та співвідношення (6.58)

$$\tilde{E}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \{g_E(\lambda)\tilde{X}(t-\lambda) - g_{\text{зам}}(\lambda)\xi(t-\lambda)\}d\lambda; \quad (6.62)$$

$$\tilde{E}(t+\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \{g_E(\gamma)\tilde{X}(t+\tau-\gamma) - g_{\text{зам}}(\gamma)\xi(t+\tau-\gamma)\}d\gamma,$$

де $g_E(t)$ – імпульсна характеристика помилки системи; $g_{\text{зам}}(t)$ – імпульсна характеристика замкненої системи.

Тому що розглядається стаціонарний режим роботи системи, то інтегрування в співвідношеннях (6.62) проводять від мінус нескінченності.

Підставивши співвідношення (6.62) в (6.61), після нескладних перетворень знайдемо автокореляційну функцію помилки:

$$R_E(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{g_E(\lambda)g_E(\gamma)R_X(\tau+\lambda-\gamma) + g_{\text{зам}}(\lambda)g_{\text{зам}}(\gamma)R_3(\tau+\lambda-\gamma) + g_E(\lambda)g_{\text{зам}}(\gamma)R_{X,3}(\tau+\lambda-\gamma) + g_{\text{зам}}(\lambda)g_E(\gamma)R_{3,X}(\tau+\lambda-\gamma)\}d\lambda d\gamma, \quad (6.63)$$

де $R_X(\tau)$ – автокореляційна функція сигналу; $R_3(\tau)$ – автокореляційна функція завади; $R_{X,3}(\tau)$ та $R_{3,X}(\tau)$ – взаємнокореляційні функції.

Підставивши в останнє співвідношення замість τ нуль, отримаємо дисперсію помилки досліджуваної системи РА:

$$\begin{aligned} \sigma_E^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{g_E(\lambda)g_E(\gamma)R_X(\lambda-\gamma) + g_{\text{зам}}(\lambda)g_{\text{зам}}(\gamma)R_3(\lambda-\gamma) + \\ &+ g_E(\lambda)g_{\text{зам}}(\gamma)R_{X,3}(\lambda-\gamma) + g_{\text{зам}}(\lambda)g_E(\gamma)R_{3,X}(\lambda-\gamma)\}d\lambda d\gamma = \\ &= \sigma_{E,X}^2 + \sigma_{E,3}^2 + \sigma_{E,X,3}^2 + \sigma_{E,3,X}^2. \end{aligned} \quad (6.64)$$

Дисперсію помилки можна обчислити і за допомогою її спектральної густини, яка дорівнює перетворенню Фур'є від автокореляційної функції помилки системи (6.63):

$$S_E(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_E(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau.$$

Підставивши в останнє співвідношення формулу (6.63), визначимо спектральну густину помилки системи:

$$S_E(\omega) = |K_E(j\omega)|^2 S_X(\omega) + |K_{\text{зам}}(j\omega)|^2 S_3(\omega) + K_E(-j\omega)K_{\text{зам}}(j\omega)S_{X,3}(\omega) + K_E(j\omega)K_{\text{зам}}(-j\omega)S_{3,X}(\omega), \quad (6.65)$$

де $S_X(\omega)$ – спектральна густина сигналу; $S_3(\omega)$ – спектральна густина завади; $S_{X,3}(\omega)$ та $S_{3,X}(\omega)$ – взаємні спектральні густини сигналу та завади.

Тому що

$$R_E(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_E(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega,$$

то у відповідності з співвідношенням (6.60) дисперсія помилки

$$\sigma_E^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{ |K_E(j\omega)|^2 S_X(\omega) + |K_{\text{зам}}(j\omega)|^2 S_3(\omega) + K_E(-j\omega) K_{\text{зам}}(j\omega) S_{X,3}(\omega) + K_E(j\omega) K_{\text{зам}}(-j\omega) S_{3,X}(\omega) \} e^{j\omega\tau} d\omega = \sigma_{E,X}^2 + \sigma_{E,3}^2 + \sigma_{E,X,3}^2 + \sigma_{E,3,X}^2. \quad (6.66)$$

Якщо сигнал та завада некорельовані, то $R_{X,3}(\tau) = R_{3,X}(\tau) = 0$, $S_{X,3}(\omega) = S_{3,X}(\omega) = 0$ та співвідношення (6.62) ÷ (6.66) спрощуються.

Перша складова в співвідношенні (6.66) залежить як від АЧХ помилки системи, так і від статистичних характеристик сигналу, і визначає середньоквадратичну помилку відтворення сигналу $X(t)$. Друга складова співвідношення (6.66) залежить від АЧХ замкненої системи і характеристик завади та характеризує помилку системи внаслідок дії завади $\xi(t)$. Останні дві складові — помилки через кореляцію сигналу з завадою та завади з сигналом.

Величина

$$\sigma_\Sigma = \sqrt{m_E^2 + \sigma_E^2} \quad (6.67)$$

носить назву сумарної середньоквадратичної помилки системи РА.

Обчислення середньоквадратичної помилки через її автокореляційну функцію (6.63) пов'язано з деякими труднощами, одна з яких пов'язана з знаходженням імпульсної характеристики досліджуваної системи РА, а друга — з обчисленням співвідношення (6.64). Тому на практиці середньоквадратичну помилку розраховують через спектральну густину помилки за формулою (6.66), обчислення інтегралу в якій проводиться за формулами, наведеними в [11, додаток 2].

В інженерних розрахунках середньоквадратичну помилку можна знайти за допомогою графоаналітичного методу. Для цього будують графіки, що відповідають окремим складовим співвідношення (6.65). Дисперсія помилки для некорельованих сигналу та завади буде визначатися як $\sigma^2 = \frac{Q_X + Q_3}{\pi}$, де

Q_X та Q_3 — відповідно площі під графіками спектральних густин сигналу та завади (рис.6.11).

На практиці іноді зустрічаються випадки, коли заваду можна вважати білим шумом, спектральна густина якого в межах смуги пропускання системи РА має сталі значення.

При цьому дисперсія помилки системи через дію завади

$$\sigma_{E,3}^2 = \frac{S_3(0)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |K_{\text{зам}}(j\omega)|^2 d\omega.$$

Величину

$$f_{\text{еф}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |K_{\text{зам}}(j\omega)|^2 d\omega = \frac{\sigma_{E,3}^2}{S_3(0)} \quad (6.68)$$

називають ефективною смугою пропускання системи РА. З рис.6.12 видно, що $\omega_{\text{еф}} = 2\pi f_{\text{еф}}$ – це сторона прямокутника, площа якого дорівнює площі, обмежений графіком квадрата АЧХ замкненої системи. Дисперсія помилки системи РА через дію завади визначається як

$$\sigma_{\text{Е.З}}^2 = \frac{S_3(\omega)\omega_{\text{еф}}}{\pi}. \quad (6.69)$$

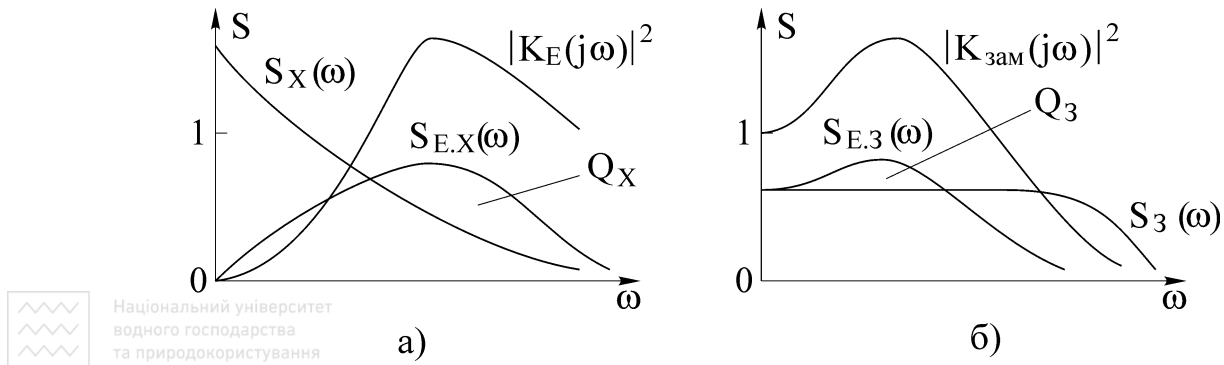


Рисунок 6.11 – До визначення середньоквадратичної помилки системи РА

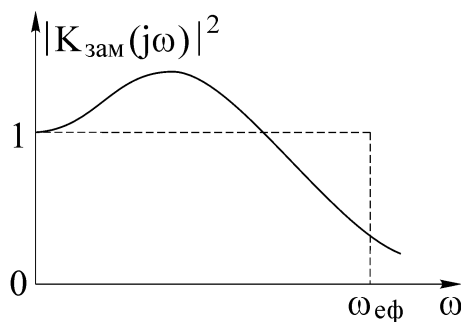


Рисунок 6.12 – До визначення ефективної смуги пропускання системи РА

В таблиці 6.2 наведені співвідношення для обчислення ефективної смуги пропускання систем РА, які найчастіше зустрічаються в радіотехнічних пристроях та системах.

6.10 Система радіоавтоматики з білим шумом на вході

На практиці завади майже завжди є білими шумами, а сигнали, як правило, не відносяться до білих шумів. Однак якщо використовувати формувальний фільтр, то аналіз систем РА відносно сигналів зводиться до випадку дії на систему білих шумів.

Формувальний фільтр – пристрій, який дозволяє генерувати випадковий сигнал з заданою спектральною густиною з сигналу білого шуму. Характеристики формувального фільтра для стаціонарних випадкових сигналів визначаються таким чином. Тому що спектральна густина сигналу є парною дрібно – раціональною функцією частоти, то вона може бути представлена у

вигляді двох комплексно – спряжених співмножників: $S_X(\omega) = N_X \psi(j\omega) \psi(-j\omega)$, звідки і знаходиться передаточна функція формувального фільтра

$$K_\phi(p) = \psi(j\omega) \Big|_{j\omega=p}.$$

Таблиця 6.2 – Передаточні функції систем РА та відповідні їм ефективні смуги пропускання

№ п/п	$K_{\text{роз}}(p)$	$f_{\text{эф}}$
1	$\frac{K}{p}$	$\frac{K}{2}$
2	$\frac{K}{1+p\tau}$	$\frac{K^2}{2\tau(1+K)}$
3	$\frac{K}{p(1+p\tau_1)(1+p\tau_2)}$	$\frac{K}{2(\tau_1+\tau_2-K\tau_1\tau_2)}$
4	$\frac{K(1+p\tau_1)}{p(1+p\tau_2)}$	$\frac{K(\tau_2+\tau_1^2K)}{2\tau_2(1+\tau_1K)}$
5	$\frac{K(1+p\tau)}{p^2}$	$\frac{1+\tau^2K}{2\tau}$

Для розрахунку коефіцієнтів передаточної функції формувального фільтра співвідношення для спектральної густини сигналу потрібно записати у вигляді

$$N_X = \frac{c_{2M}(j\omega)^{2M} + c_{2(M-1)}(j\omega)^{2(M-1)} + \dots + c_{2k}(j\omega)^{2k} + \dots + c_2(j\omega)^2 + c_0}{d_{2N}(j\omega)^{2N} + d_{2(N-1)}(j\omega)^{2(N-1)} + \dots + d_{2k}(j\omega)^{2k} + \dots + d_2(j\omega)^2 + d_0} = \quad (6.70)$$

$$= \left| \frac{b_M(j\omega)^M + b_{M-1}(j\omega)^{M-1} + \dots + b_k(j\omega)^k + \dots + b_1j\omega + b_0}{a_N(j\omega)^N + a_{N-1}(j\omega)^{N-1} + \dots + a_k(j\omega)^k + \dots + a_1j\omega + a_0} \right|.$$

Обчисливши квадрат модуля лівої частини співвідношення (6.70) та прирівнявши коефіцієнти при однакових ступенях частоти, отримаємо рівняння для визначення коефіцієнтів передаточної функції формувального фільтра a_k та b_k .

Формувальний фільтр та досліджувана система РА утворюють деяку розширену систему, на вхід якої діє білий шум. На рис.6.13 наведена структурна схема такої системи для випадку, коли завада є білим шумом. Якщо за-

вада не є білим шумом, то до структурної схеми розширеної системи потрібно включити формувальний фільтр, який з білого шуму буде генерувати випадкову заваду з заданою спектральною густиною.

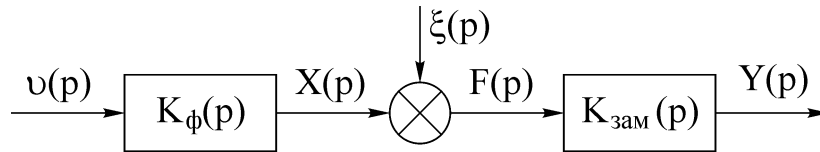


Рисунок 6.13 – Структурна схема включення формувального фільтра

Приклад 6.2. Знайти передаточну функцію формувального фільтра для сигналу, спектральна густина якого визначається співвідношенням

$$S(\omega) = N \frac{1 + \tau_1^2 \omega^2}{\omega^2 (\tau_2^4 \omega^4 + 4\gamma^2 \tau_2^2 \omega^2 + 1)}.$$

У відповідності з співвідношенням (6.70)

$$\frac{1 + \tau_1^2 \omega^2}{\omega^2 (\tau_2^4 \omega^4 + 4\gamma^2 \tau_2^2 \omega^2 + 1)} = \left| \frac{1 + \tau_1 j\omega}{\omega \left[\tau_2^2 (j\omega)^2 + \sqrt{2\tau_2^2 (1 + 2\gamma^2)} j\omega + 1 \right]} \right|^2.$$

Таким чином, передаточна функція формувального фільтра має вигляд

$$K_\phi(p) = \frac{1 + p\tau_1}{p(\tau_2^2 p^2 + 2\gamma_1 \tau_2 p + 1)}, \quad (6.71)$$

де $2\gamma_1 = \sqrt{2(1 + 2\gamma^2)}$.

На вхід формувального фільтра з передаточною функцією (6.71) необхідно подати білий шум з рівнем спектральної густини N .

Приклад 6.3. Визначити середньоквадратичну помилку системи РА, передаточна функція якої в замкненому стані має вигляд

$$K_{\text{зам}}(p) = \frac{1 + p\tau_1}{(1 + p\tau_2)(1 + p\tau_3)},$$

де $\tau_1 = 0,5$ с; $\tau_2 = 0,37$ с; $\tau_3 = 0,14$ с.

На систему потрапляють:

1) випадковий сигнал з математичним очікуванням $m_X = \alpha t$ та спектральною густиною $S_X(\omega) = \frac{N_X}{\omega^2 (1 + \tau_X^2 \omega^2)}$, де $\alpha = 0,175$ рад/с; $N_X = -3,05 \cdot 10^{-4}$ рад² · с; $\tau_X = 20$ с;

2) випадкова дія з спектральною густиною $S_B(\omega) = N_B \frac{1 + \tau_{B.O}^2 \omega^2}{\omega^2 (\tau_B^2 \omega^4 + 4\gamma^2 \tau_B^2 \omega^2 + 1)}$, де $N_B = 0,15 \cdot 10^{-4}$ рад² · с; $\tau_B = 0,4$ с; $\tau_{B.O} = 2,5$ с; $4\gamma^2 = 1$;

3) білий шум з рівнем спектральної густини $S_{\text{б.ш}} = 6,25 \cdot 10^{-8}$ рад · с;

4) завади, обумовлені тепловими шумами та флуктуаціями випадкового сигналу, які будемо вважати білими шумами та об'єднаємо в одну дію з рівнем спектральної густини $S_{\Phi}(\omega) = N_{\Phi} = 0,31 \cdot 10^{-6} \text{ рад} \cdot \text{с}$.

Математичне очікування (динамічна помилка системи) у відповідності з співвідношенням (6.59) дорівнює

$$m_E = \lim_{p \rightarrow 0} p K_E(p) m_X(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p K_E(p) \frac{\alpha}{p^2} = \lim_{p \rightarrow 0} K_E(p) \frac{\alpha}{p} = (\tau_2 + \tau_3 - \tau_1) \alpha =$$

$$= (0,37 + 0,14 - 0,5) \cdot 0,175 = 0,0175 \text{ рад},$$

де $K_E(p) = 1 - K_{\text{зам}}(p) = \frac{p^2 \tau_2 \tau_3 + p(\tau_2 + \tau_3 - \tau_1)}{(1 + p\tau_2)(1 + p\tau_3)}$ – передаточна функція системи РА для помилки.

Дисперсія помилки сигналу відносно випадкової складової сигналу обчислюється за співвідношенням (6.66), в якому спектральна густина під знаком інтегралу

$$S_{E,X}(\omega) = N_X \cdot |K_E(j\omega)K_{\Phi,X}(j\omega)|^2,$$

де $K_{\Phi,X}(j\omega) = \frac{1}{j\omega(1 + j\omega\tau_X)}$ – передаточна функція формувального фільтра сигналу.

Таким чином, дисперсія помилки відносно сигналу визначається як

$$\sigma_{E,X}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} N_X \left| \frac{\tau_1 \tau_2 j\omega + \tau_2 + \tau_3 - \tau_1}{\tau_2 \tau_3 \tau_X (j\omega)^3 + [\tau_2 \tau_3 + \tau_2 \tau_X + \tau_3 \tau_X] (j\omega)^2 + (\tau_2 + \tau_3 + \tau_X) j\omega + 1} \right| d\omega =$$

$$= N_X \frac{\tau_2^2 \tau_3^2 + (\tau_2 + \tau_3 - \tau_1)^2 (\tau_2 \tau_3 + \tau_2 \tau_X + \tau_3 \tau_X)}{2[(\tau_2 + \tau_3 + \tau_X)(\tau_2 \tau_3 + \tau_2 \tau_X + \tau_3 \tau_X) - \tau_2 \tau_3 \tau_X]}.$$

Останній інтеграл знайдемо за формулою, наведеною в [11, додаток 2] для $N = 3$. Підставивши значення параметрів системи та сигналу в останнє співвідношення, отримаємо:

$$\sigma_{E,X}^2 = \frac{0,37^2 \cdot 0,14^2 + (0,37 + 0,14 - 0,5)^2 (0,37 \cdot 0,14 + 0,37 \cdot 20 + 0,14 \cdot 20)}{2 \cdot [(0,37 + 0,14 + 20)(0,37 \cdot 0,14 + 0,37 \cdot 20 + 0,14 \cdot 20) - 0,37 \cdot 0,14 \cdot 20]} \times$$

$$\times 3,05 \cdot 10^{-4} = 2,1 \cdot 10^{-7} \text{ рад}^2.$$

Випадковий сигнал є керуючою дією, тому в співвідношенні для дисперсії помилки він визначається через передаточну функцію помилки. Дисперсія помилки системи РА відносно випадкової дії згідно з (6.66)

$$\sigma_{E,B}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} N_B \cdot |K_E(j\omega)K_{\Phi,B}(j\omega)|^2 d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} N_B \cdot \left| \frac{c_{2,B}(j\omega)^2 + c_{1,B}j\omega + c_{0,B}}{d_{4,B}(j\omega)^4 + d_{3,B}(j\omega)^3 + d_{2,B}(j\omega)^2 + d_{1,B}j\omega + d_{0,B}} \right| d\omega,$$

де $K_{\Phi,B}(\omega)$ – передаточна функція формувального фільтра для випадкової дії, яка

визначається співвідношенням (6.71).

Цей інтеграл обчислюється за співвідношенням, наведеним в [11, додаток 2] для випадку $N = 4$. В результаті отримаємо

$$\sigma_{E,B}^2 = N_B \frac{c_{2,B}^2 d_{0,B} d_{1,B} d_{4,B} + d_{0,B} d_{3,B} d_{4,B} (c_{1,B}^2 - 2c_{0,B} c_{2,B}) + c_{0,B}^2 d_{4,B} (d_{2,B} d_{3,B} - d_{1,B} d_{4,B})}{2d_{0,B} d_{4,B} (d_{1,B} d_{2,B} d_{3,B} - d_{0,B} d_{3,B}^2 - d_{1,B}^2 d_{4,B})},$$

де $c_{2,B} = \tau_2 \tau_3 \tau_{B,O}$; $c_{1,B} = \tau_{B,O} (\tau_2 + \tau_3 - \tau_1)$; $c_{0,B} = \tau_2 + \tau_3 - \tau_1$; $d_{4,B} = \tau_B^2 \tau_2 \tau_3$;
 $d_{0,B} = 1$; $d_{3,B} = \tau_B^2 (\tau_2 + \tau_3) + 2\gamma_1 \tau_B \tau_2 \tau_3$; $d_{2,B} = \tau_B^2 + \tau_2 \tau_3 + 2\gamma_1 \tau_B (\tau_2 + \tau_3)$;
 $d_{1,B} = 2\gamma_1 \tau_B + \tau_2 + \tau_3$.

Після підстановки в останнє співвідношення заданих значень параметрів системи та сигналу отримаємо $\sigma_{E,B}^2 = 2,31 \cdot 10^{-6} \text{ рад}^2$.

Складові дисперсії помилки системи, які виникають через наявність білого шуму та завад, визначаються такими співвідношеннями:

$$\sigma_{E,B,Ш}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{Б,Ш}(\omega) \cdot |K_{зам}(j\omega)|^2 d\omega = S_{Б,Ш} \left(\frac{\tau_1^2}{2\tau_2 \tau_3 (\tau_2 + \tau_3)} + \frac{1}{2(\tau_2 + \tau_3)} \right) = \frac{S_{Б,Ш} (\tau_1^2 + \tau_2 \tau_3)}{2\tau_2 \tau_3 (\tau_2 + \tau_3)},$$

$$\begin{aligned} \sigma_{E,Ф}^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{Ф}(\omega) \cdot |K_{зам}(j\omega)|^2 d\omega = N_{Ф} \left(\frac{\tau_1^2}{2\tau_2 \tau_3 (\tau_2 + \tau_3)} + \frac{1}{2(\tau_2 + \tau_3)} \right) = \\ &= \frac{N_{Ф} (\tau_1^2 + \tau_2 \tau_3)}{2\tau_2 \tau_3 (\tau_2 + \tau_3)} = \sigma_{E,B,Ш}^2 \frac{N_{Ф}}{S_{Б,Ш}}. \end{aligned}$$

Підставивши чисельні значення, отримаємо:

$$\sigma_{E,B,Ш}^2 = 6,25 \cdot 10^{-8} \frac{0,5^2 + 0,37 \cdot 0,14}{2 \cdot 0,37 \cdot 0,14 \cdot (0,37 + 0,14)} = 3,6 \cdot 10^{-7} \text{ рад}^2;$$

$$\sigma_{E,Ф}^2 = 3,6 \cdot 10^{-7} \frac{0,31 \cdot 10^{-6}}{6,25 \cdot 10^{-8}} = 1,73 \cdot 10^{-6} \text{ рад}^2.$$

Таким чином, сумарна середньоквадратична помилка системи РА у відповідності з співвідношенням (6.67) визначається як

$$\begin{aligned} \sigma_{\Sigma} &= \sqrt{m_E^2 + \sigma_{E,X}^2 + \sigma_{E,B}^2 + \sigma_{E,B,Ш}^2 + \sigma_{E,Ф}^2} = \\ &= \sqrt{0,0175^2 + 2,1 \cdot 10^{-7} + 2,31 \cdot 10^{-6} + 3,6 \cdot 10^{-7} + 1,73 \cdot 10^{-6}} = 0,028 \text{ рад}. \end{aligned}$$

Контрольні запитання

1. Які характеристики складають поняття якості роботи системи РА?
2. Дайте визначення показників якості роботи системи в усталеному режимі.
3. Чим відрізняються статичні помилки розімкнених та замкнених систем?
4. Які існують способи зменшення та виключення статичних помилок?
5. Дайте визначення показників якості перехідного процесу.

6. Назвіть методи оцінки показників якості перехідних процесів та поясніть фізичний зміст основних показників якості.

7. Поясніть зв'язок частотних показників якості роботи з частотними характеристиками розімкненої системи РА.

8. Що таке статична та динамічна помилка роботи системи РА?

9. Які дії відносяться до сигналів, що змінюються повільно?

10. Яким чином експериментально можна визначити помилку системи РА за положенням та за швидкістю?

11. При якому вхідному сигналі статична помилка збігається з помилкою за положенням?

12. Чому дорівнюють перші два коефіцієнти помилок в системах РА з аста-тизмом першого та другого порядків?

13. Яким чином обчислюється помилка при гармонічному вхідному сигналі?

14. Що таке сумарна помилка системи РА?

15. Дайте визначення середньоквадратичної помилки системи РА та вкажіть способи її обчислення.

16. Поясніть поняття ефективної смуги пропускання системи РА відносно білого шуму.

17. Що таке формувальний фільтр і як знайти його передаточну функцію?

7 ПРОЕКТУВАННЯ СИСТЕМ РАДІОАВТОМАТИКИ

7.1 Основні положення. Постановка задачі

Задача проектування (синтезу) системи РА полягає у виборі структурної схеми, параметрів системи та способу її технічної реалізації за умови забезпечення ряду вимог, які виходять з призначення проектованої системи та забезпечення її характеристик.

Один з можливих способів опису вимог до проектованої системи полягає в завданні показників якості роботи системи, розглянутих в розділі 6 (наприклад, припустимих значень статичної, динамічної та середньоквадратичної помилок системи). Це можна зробити, якщо відомі характеристики керувальних та збуджувальних дій. Детерміновані дії повинні бути задані як функції часу або їх похідні. Для випадкових сигналів та завад повинні бути відомі їх кореляційні функції або спектральні густини. При такій постановці задачі синтез системи РА зводиться до вибору структурної схеми, за допомогою якої можна забезпечити показники якості роботи системи РА не гірше заданих.

Якщо характеристики керувальних та збуджувальних дій відомі, то систему РА можна спроектувати як оптимальну, забезпечивши мінімальне значення сумарної середньоквадратичної помилки. Розв'язати цю задачу дозволяє теорія оптимальних фільтрів Н.Вінера та Р.Калмана.

Можливою є й інша постановка задачі синтезу оптимальних систем. Найбільш загальною є її постановка з врахуванням досягнення мінімуму функціоналу (критерію якості)

$$J = \int_0^T [\vartheta_E(t) + \vartheta_Z(t)] dt, \quad (7.1)$$

де $\vartheta_E(t) = E^2(t) + \alpha_1 \dot{E}^2(t) + \alpha_2 \ddot{E}^2(t) + \dots + \alpha_k [E^{(k)}(t)]^2 + \dots$ – квадратична форма відносно помилки системи $E(t)$;

$\vartheta_Z(t) = Z^2(t) + \beta_1 \dot{Z}^2(t) + \beta_2 \ddot{Z}^2(t) + \dots + \beta_k [Z^{(k)}(t)]^2 + \dots$ – квадратична форма відносно сигналу управління $Z(t)$; T – час роботи системи.

Перша квадратична форма в функціоналі (7.1) вибирається з вимог, що ставляться до точності проектованої системи, а друга враховує обмеження на сигнал управління. При цьому задача оптимального синтезу формується таким чином. З припустимої множини $Z(t)$ необхідно вибрати та технічно реалізувати такий сигнал управління, який переводить об'єкт управління з початкового стану в кінцевий та мінімізує функціонал (7.1). Для розв'язку таких задач використовуються методи варіаційного числення, принцип максимуму Л.С.Понтрягіна, метод динамічного програмування Р.Белмана і т. і. Тут можливими є два випадки: 1) інформація про стан об'єкта управління повністю відома; 2) інформація про об'єкт управління неповна або зовсім невідома. В другому випадку при синтезі системи виникає додаткова задача оцінки стану об'єкта управління, на основі якої формується оптимальний сигнал управління.

Синтез оптимальних систем РА за умови мінімуму функціоналу (7.1) пов'язаний з рядом труднощів. Одна з них полягає в тому, що в наш час немає методів, які дозволяють зв'язати коефіцієнти квадратичних форм функціоналу (7.1) α_k та β_k із заданими показниками якості роботи проектованої системи. Тому в процесі синтезу системи доводиться розраховувати велику кількість варіантів оптимальних систем з різними видами квадратичних форм та їх коефіцієнтів, а обсяг розрахунків при цьому може бути значним. Друга з них пов'язана з реалізацією знайдених оптимальних алгоритмів управління, які можуть бути досить складними і реалізуватися лише наближено. Внаслідок відзначених труднощів методи проектування систем РА за умови мінімуму функціоналу (7.1) використовуються в основному в наукових дослідженнях для оцінки граничних співвідношень та майже непридатні до інженерних задач проектування систем РА.

В цій главі розглядається синтез систем РА за умови забезпечення припустимих помилок в системі та забезпечення інших показників якості роботи. Такий метод носить назву динамічного синтезу систем РА.

Окрім вимог до якості функціонування в процесі синтезу систем РА

також ставляться вимоги і до їх складності. Бажано, щоб спроектована система була простою, а вимоги до елементів системи – мінімальними. В якості функціоналу складності системи можна використовувати інтеграл [17]

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^{2r} |K_{\text{роз}}(j\omega)|^2 d\omega, \quad (7.2)$$

де $K_{\text{роз}}(j\omega)$ – передаточна функція розімкненої системи РА; r – порядок аста- тизму.

Чим меншим є значення інтегралу (7.2), тим нижчими є вимоги до пристроїв системи РА.

Окрім вимог до якості роботи проекрованої системи РА, до її складності ставиться і ряд вимог, пов'язаних з надійністю роботи системи, стабільністю її характеристик при зміні умов навколишнього середовища, експлуатацією, масою, габаритами і т. і. В наш час теорія оптимальних систем не дозволяє поєднати всю сукупність вимог до проекрованої системи у вигляді єдиного критерію, тому забезпечення їх багато в чому залежить від досвіду та кваліфікації інженера – проектувальника.

7.2 Бажана передаточна функція розімкненої системи

При синтезі системи РА будемо вважати, що за відомими характеристиками керувальних та збуджувальних дій визначені припустимі значення помилок за положенням, швидкістю, прискоренням, ширина смуги пропускання, знайдена за умови забезпечення потрібного значення середньоквадратичної помилки, а також припустима коливальність системи. Вимоги до вказаних помилок формуються у вигляді таких нерівностей:

$$E_X \leq E_{X.\text{пр}}; \quad E_{\dot{X}} \leq E_{\dot{X}.\text{пр}}; \quad E_{\ddot{X}} \leq E_{\ddot{X}.\text{пр}}, \quad (7.3)$$

де E_X , $E_{\dot{X}}$ та $E_{\ddot{X}}$ – помилки проекрованої системи відповідно за положенням, швидкістю та прискоренням.

На першому етапі задача синтезу полягає в знаходженні бажаної передаточної функції розімкненої системи, яка дозволяє забезпечити задані вимоги до проекрованої системи РА. Очевидно, що бажану передаточну функцію розімкненої системи слід формувати в найпростішому вигляді. Бажані передаточні функції розімкненої статичної системи можуть мати такий вигляд:

$$K_{\text{роз. баж.1}}(p) = \frac{K}{(1 + p\tau_1)(1 + p\tau_2) \prod_{k=3}^N (1 + p\tau_k)}; \quad (7.4)$$

$$K_{\text{роз баж.2}}(p) = \frac{K(1 + p\tau_1)}{(1 + p\tau_2)^2(1 + p\tau_3) \prod_{k=4}^N (1 + p\tau_k)}. \quad (7.5)$$

При синтезі систем з астатизмом першого порядку:

$$K_{\text{роз баж.1}}(p) = \frac{K(1 + p\tau_1)}{p(1 + p\tau_2)(1 + p\tau_3) \prod_{k=4}^N (1 + p\tau_k)}; \quad (7.6)$$

$$K_{\text{роз баж.2}}(p) = \frac{K(1 + p\tau_1)^2}{p^2(1 + p\tau_2)^2(1 + p\tau_3) \prod_{k=4}^N (1 + p\tau_k)}. \quad (7.7)$$

При проектуванні системи з астатизмом другого порядку бажана передаточна функція розімкненої системи має вигляд

$$K_{\text{роз баж}}(p) = \frac{K(1 + p\tau_1)}{p^2(1 + p\tau_2) \prod_{k=3}^N (1 + p\tau_k)}. \quad (7.8)$$

Задача синтезу системи РА зводиться до визначення параметрів заданої передаточної функції K , τ_1 , τ_2 та τ_3 за заданими показниками якості роботи системи. Кола з сталими часу τ_k в такій функції враховують вплив на проектувану систему РА пристроїв з малими сталими часу.

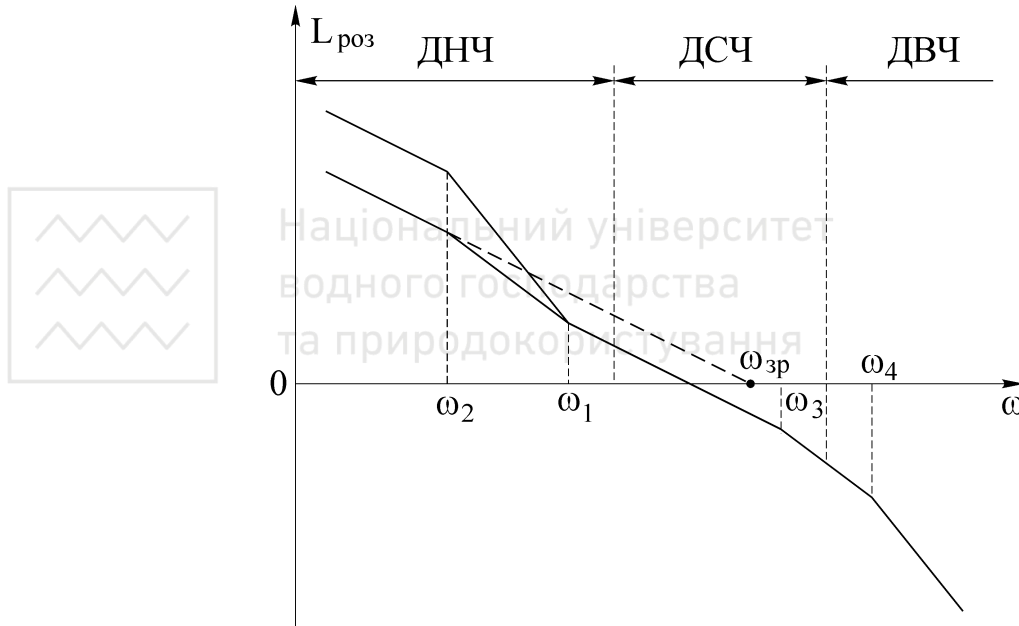


Рисунок 7.1 – Логарифмічні АЧХ розімкнених систем РА

Перед тим, як розглядати методику знаходження параметрів бажаної передаточної функції, проаналізуємо типові ЛАЧХ, що відповідають передаточним функціям (7.6) та (7.7) (рис.7.1). На цих характеристиках можна виділити три діапазони частот. Вид характеристики в діапазоні низьких частот

(ДНЧ) характеризує точність роботи системи відносно керувальної дії. В діапазоні середніх частот (ДСЧ) знаходиться частота зрізу. В цьому діапазоні вид ЛАЧХ визначає запас стійкості системи за фазою, смугу пропускання та показники якості перехідного процесу. Вид характеристики в діапазоні високих частот (ДВЧ) впливає на запаси стійкості в системі РА.

Знайдемо параметри бажаної передаточної функції системи з астатизмом першого порядку, що визначається виразом (7.6). За заданим значенням коливальності системи та формулою (6.12) визначимо запас стійкості за фазою

$$\gamma = -\arcsin \frac{1}{M}. \quad (7.9)$$

За відомим значенням смуги пропускання $\Delta\omega$ можна розрахувати частоту зрізу проектованої системи РА:

$$\omega_{зр} = \frac{\Delta\omega}{2\cos\gamma}. \quad (7.10)$$

Коефіцієнти помилок проектованої системи РА можна знайти за припустимими значеннями помилок за швидкістю та прискоренням:

$$C_0 = 0; \quad C_1 = \frac{E_{\dot{x}}}{\dot{X}_m}; \quad C_2 = \frac{2E_{\ddot{x}}}{\ddot{X}_m}, \quad (7.11)$$

де \dot{X}_m та \ddot{X}_m – максимальні значення першої та другої похідних від керувальної дії.

Коефіцієнт помилки за швидкістю визначає коефіцієнт підсилення в системі РА (див. табл.6.1):

$$K = \frac{1}{C_1}. \quad (7.12)$$

Для знаходження сталих часу τ_1 та τ_2 встановимо зв'язок частот спрягнення $\omega_1 = \frac{1}{\tau_1}$ та $\omega_2 = \frac{1}{\tau_2}$ з коефіцієнтом підсилення та частотою зрізу. З

рис.7.1 виходить що

$$L_{роз}(\omega_2) = 20\lg \frac{K}{\omega_2}; \quad L_{роз}(\omega_1) = 20\lg \frac{\omega_{зр}}{\omega_1}. \quad (7.13)$$

Нахил ЛАЧХ між частотами ω_1 та ω_2 дорівнює -40 дБ/дек, тому

$$L_{роз}(\omega_2) - L_{роз}(\omega_1) = 40\lg \frac{\omega_1}{\omega_2}. \quad (7.14)$$

Згідно з співвідношеннями (7.13) та (7.14)

$$\frac{K}{\omega_{зр}} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\tau_2}{\tau_1}. \quad (7.15)$$

Сталі часу τ_1 та τ_2 можна отримати з співвідношення для коефіцієнта помилки за прискоренням (див. табл.6.1):

$$C_2 = 2 \left\{ \frac{\tau_2 + \tau_3 + \sum_{k=4}^N \tau_k - \tau_1}{K} - \frac{1}{K^2} \right\} \approx \frac{2(\tau_2 - \tau_1)}{K}. \quad (7.16)$$

Спрощення в співвідношенні (7.16) не будуть призводити до невиконання вимог за точністю роботи проектованої системи РА.

З співвідношень (7.15) та (7.16) знаходимо, що

$$\tau_1 = \frac{KC_2 \omega_{zp}}{2(K - \omega_{zp})}; \quad \tau_2 = \frac{K\tau_1}{\omega_{zp}} = \frac{K^2 C_2}{2(K - \omega_{zp})}. \quad (7.17)$$

Сталу часу τ_3 передаточної функції (7.6) визначимо за умови забезпечення в проектованій системі РА запасу стійкості за фазою (7.9):

$$\gamma = -90^\circ - \arctg \omega_{zp} \tau_1 + \arctg \omega_{zp} \tau_2 + \arctg \omega_{zp} \tau_3 + \sum_{k=4}^N \arctg \omega_{zp} \tau_k. \quad (7.18)$$

При значних вимогах до точності роботи системи РА не завжди можна забезпечити задані умови, використовуючи передаточну функцію (7.6). Тому доводиться використовувати більш складну передаточну функцію типу (7.7). В цьому випадку коефіцієнт підсилення обчислюється за формулою (7.12), а сталі часу τ_1 та τ_2 – у відповідності з наступним співвідношенням:

$$\tau_1 = \frac{KC_2}{4 \left(\sqrt{\frac{K}{\omega_{zp}}} - 1 \right)}; \quad \tau_2 = \tau_1 \sqrt{\frac{K}{\omega_{zp}}}. \quad (7.19)$$

Сталу часу τ_3 розраховують з співвідношення

$$\gamma = -90^\circ - 2 \arctg \omega_{zp} \tau_1 + 2 \arctg \omega_{zp} \tau_2 + \arctg \omega_{zp} \tau_3 + \sum_{k=4}^N \arctg \omega_{zp} \tau_k. \quad (7.20)$$

Аналогічно визначаються параметри бажаних передаточних функцій статичних систем РА (7.4) та (7.5) і систем з астатизмом другого порядку (7.8).

7.3 Визначення передаточних функцій корегувальних пристроїв

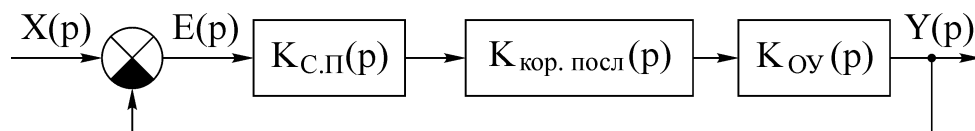
Після вибору та визначення параметрів бажаної передаточної функції розімкненої системи РА знаходять передаточні функції корегувальних пристроїв, попередньо визначивши передаточну функцію функціонально необ-

хідних пристроїв проектованої системи. До таких пристроїв відносяться, наприклад, фазовий детектор та переналаштовуваний генератор в системі ФАПЧ, гетеродин та частотний дискримінатор в системі АПЧ, кутовий дискримінатор та антена з виконавчим пристроєм та підсилювачем потужності в системі автоматичного супроводження цілі РЛС і т. і.

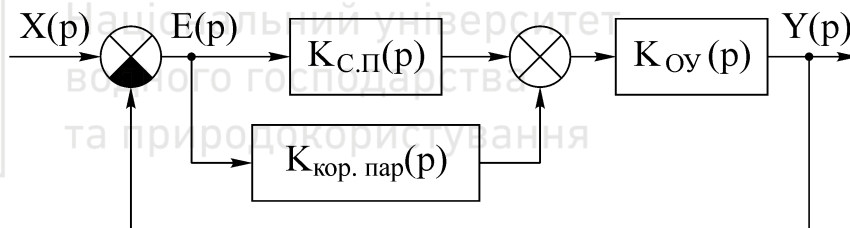
Передаточну функцію розімкненої системи без корегувальних пристроїв, складену з передаточних функцій функціонально необхідних пристроїв системи, будемо називати вихідною передаточною функцією.

Включення до складу системи РА корегувальних пристроїв означає введення до алгоритму управління, що формується регулятором системи, додаткових сигналів, пропорційних сигналу помилки, похідним та інтегралам від нього, а також сигналів, пропорційних похідним від вихідного сигналу системи РА. З фізичної точки зору введення додаткових сигналів призводить до компенсації впливу на якість роботи системи РА найбільш інерційних пристроїв системи, в результаті чого і досягаються задані показники якості роботи системи.

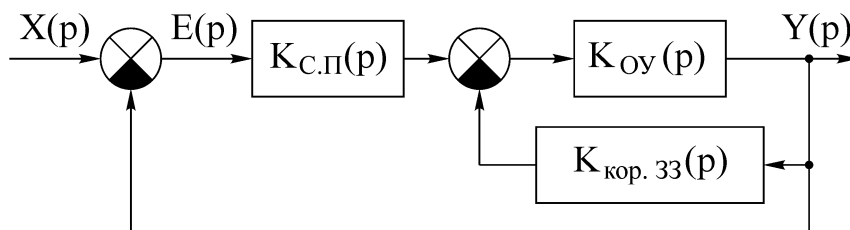
Існує три способи включення корегувальних пристроїв: послідовний (рис.7.2, а); паралельний (рис.7.2, б) та за схемою зі зворотним зв'язком (рис.7.2, в). Вибір того або іншого способу включення корегувального пристрою залежить від зручності технічної реалізації та вимог до стабільності характеристик системи РА.



а)



б)



в)

Рисунок 7.2 – Способи включення корегувальних пристроїв: а – послідовний; б – паралельний; в – за схемою зі зворотним зв'язком

Синтез систем РА заснований на визначенні передаточної функції корегувального пристрою, включеного послідовно в коло сигналу помилки системи. Передаточна функція такого пристрою повинна вибиратися такою, щоб виконувалась умова

$$K_{\text{роз.баж}}(p) = K_{\text{роз.вих}}(p) \cdot K_{\text{кор.посл}}(p), \quad (7.21)$$

де $K_{\text{роз.вих}}(p)$ – передаточна функція вихідної частини розімкненої системи; $K_{\text{кор.посл}}(p)$ – передаточна функція послідовного корегувального кола.

З останнього співвідношення

$$K_{\text{кор.посл}}(p) = \frac{K_{\text{кор.баж}}(p)}{K_{\text{роз.вих}}(p)}. \quad (7.22)$$

Таким чином, чим більше кіл вихідної передаточної функції включено до бажаної передаточної функції розімкненої системи, тим менш складною буде передаточна функція послідовного корегувального кола. Кількість кіл вихідної передаточної функції, які можна ввести до складу бажаної передаточної функції, визначається заданим запасом стійкості за фазою.

Якщо в системі РА використовується корегувальний пристрій, включений паралельно з будь-яким елементом системи (рис.7.2, б), то його передаточна функція визначається з співвідношення

$$K_{\text{роз.баж}}(p) = K_{\text{роз.вих}}(p) \cdot K_{\text{кор.посл}}(p) = K_{\text{роз.вих}}(p) + K_{\text{кор.пар}}(p) \cdot K_{\text{оу}}(p), \quad (7.23)$$

звідки

$$K_{\text{кор.пар}}(p) = K_{\text{с.п}}(p) \cdot \{K_{\text{кор.посл}}(p) - 1\}, \quad (7.24)$$

де $K_{\text{кор.пар}}(p)$ – передаточна функція паралельного корегувального пристрою; $K_{\text{с.п}}(p)$ – передаточна функція кола сигналу помилки.

Якщо використовується корегувальний пристрій, включений в коло зворотного зв'язку (рис.7.2, в), то його передаточна функція визначається з формули

$$K_{\text{роз.баж}}(p) = K_{\text{роз.вих}}(p) \cdot K_{\text{кор.посл}}(p) = \frac{K_{\text{роз.вих}}(p)}{1 + K_{\text{оу}}(p) \cdot K_{\text{кор.зз}}(p)}, \quad (7.25)$$

звідки

$$K_{\text{кор.зз}}(p) = \frac{1}{K_{\text{оу}}(p)} \left\{ \frac{1}{K_{\text{кор.посл}}(p)} - 1 \right\}, \quad (7.26)$$

де $K_{\text{кор.зз}}(p)$ – передаточна функція корегувального пристрою в колі зворотного зв'язку; $K_{\text{оу}}(p)$ – передаточна функція об'єкта управління (пристрою, охопленого зворотним зв'язком).

В сучасних системах РА використовуються всі три способи включення корегувальних пристроїв. Це пояснюється тим, що в ряді випадків передаточ-

на функція одного пристрою буде настільки складною, що її важко реалізувати технічно. Крім того, для покращення стабільності роботи системи РА при зміні умов навколишнього середовища та коливань напруг джерел живлення доцільно найбільш інерційні та нестабільні пристрої системи охопити зворотним зв'язком. В цьому випадку передаточна функція послідовного корегувального пристрою, обчислена за співвідношенням (7.22), має вигляд

$$K_{\text{кор. посл}}(p) = K_{\text{кор. посл.1}}(p) \cdot K_{\text{кор. посл.2}}(p). \quad (7.27)$$

Один з співмножників останнього співвідношення, наприклад, перший, реалізується за допомогою послідовного корегувального пристрою, а другий – корегувального пристрою в колі зворотного зв'язку, передаточна функція якого визначається співвідношенням (7.26).

При синтезі систем РА зустрічаються випадки, коли передаточні функції корегувальних пристроїв не задовольняють умову фізичної реалізованості. В цих випадках бажана передаточна функція через спрощення передаточних функцій корегувальних пристроїв може бути реалізована лише наближено. При цьому необхідно забезпечити, щоб ЛАЧХ розімкненої системи в діапазоні низьких та середніх частот збігалася з бажаною ЛАЧХ (розходження характеристик допускається лише в діапазоні високих частот). Після спрощення передаточних функцій корегувальних пристроїв необхідно побудувати ЛАЧХ спроектованої системи РА і перевірити виконання заданих показників якості роботи.

На практиці в системах РА використовуються корегувальні пристрої постійного струму. Корегувальні пристрої змінного струму використовуються рідко, тому що вони більш складні та для їх нормального функціонування необхідні джерела високостабільної частоти, що в деяких випадках, особливо в системах РА літальних апаратів, технічно не реалізується. Тому далі будемо розглядати тільки корегувальні пристрої постійного струму.

На рис.7.3 наведені електрична схема та частотні характеристики кола з запізненням за фазою, яке в системах РА використовується як послідовний корегувальний пристрій. Його передаточна функція має вигляд

$$K(p) = \frac{1 + pCR_2}{1 + pC(R_1 + R_2)} = \frac{1 + p\tau}{1 + p\alpha\tau}, \quad (7.28)$$

де $\tau = R_2C$ – стала часу кола; $\alpha = \frac{R_1 + R_2}{R_2} = 1 + \frac{R_1}{R_2}$ – сталий коефіцієнт.

На рис.7.4 наведені електрична схема та частотні характеристики послідовного корегувального кола з випередженням за фазою, передаточна функція якого має вигляд

$$K(p) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1 + pCR_1}{1 + pC \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} = \beta \frac{1 + p\tau}{1 + p\beta\tau}, \quad (7.29)$$

де $\tau = R_1 C$; $\beta = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$.

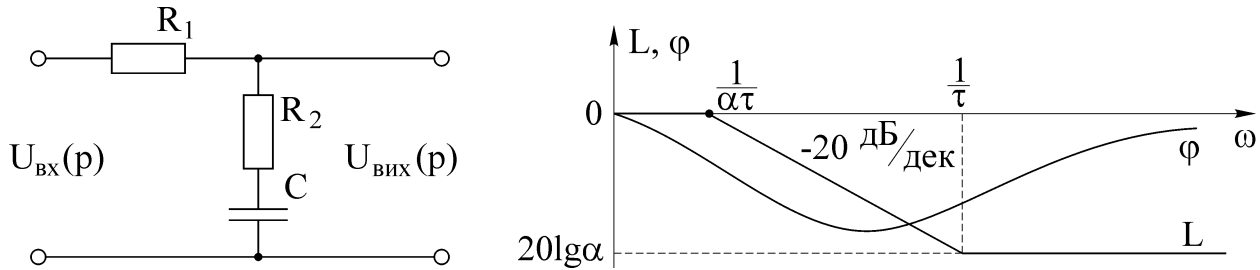


Рисунок 7.3 – Послідовне корегувальне коло з запізненням за фазою: а – електрична схема; б – частотні характеристики

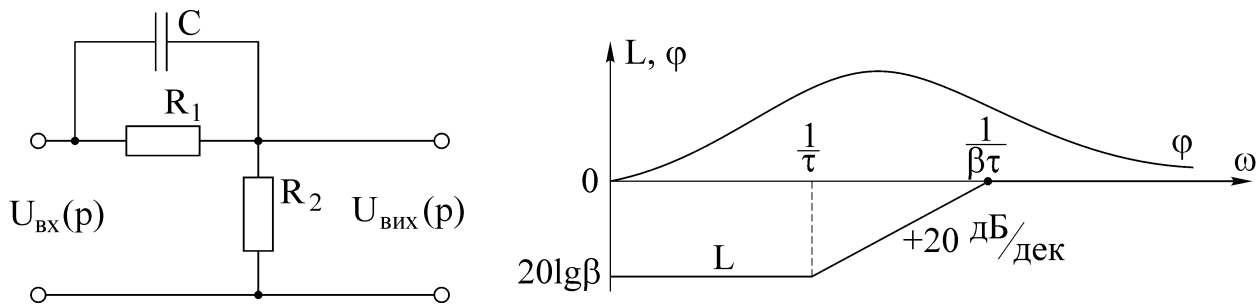


Рисунок 7.4 – Послідовне корегувальне коло з випередженням за фазою: а – електрична схема; б – частотні характеристики

В системах РА також використовується послідовне комбіноване коло, електрична схема і частотні характеристики якого наведені на рис.7.5. Передаточна функція такого корегувального кола визначається співвідношенням

$$K(p) = \frac{K(1 + p\tau_1)(1 + p\tau_2)}{(1 + p\tau_3)(1 + p\tau_4)}. \quad (7.30)$$

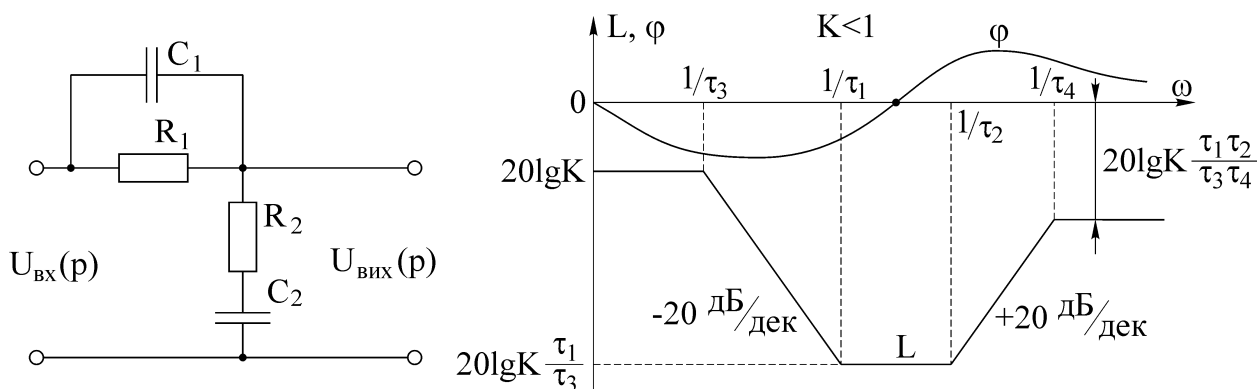


Рисунок 7.5 – Послідовне комбіноване корегувальне коло: а – електрична схема; б – частотні характеристики

Опори та ємності послідовного комбінованого корегувального кола вибирають такими, щоб виконувалась умова $\tau_3 > \tau_1 > \tau_2 > \tau_4$. З цією метою необхідно, щоб $C_2 > C_1$ та $R_1 > R_2$. Тоді опори та ємності такого корегувального кола розраховуються за відомими сталими часу:

$$\tau_1 = R_2 C_2; \quad \tau_2 = R_1 C_1; \quad \tau_3 = R_1 C_1 + (R_1 + R_2) C_2 = \tau_1 + \tau_2 + R_1 C_2;$$

$$\tau_4 = \frac{R_1 C_1 R_2 C_2}{R_1 C_1 + (R_1 + R_2) C_2} = \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_3} \approx \frac{R_1 C_1 R_2}{R_1 + R_2}. \quad (7.31)$$

В якості корегувальних зворотних зв'язків використовують жорсткі та гнучкі зворотні зв'язки.

Жорсткий зворотний зв'язок не містить диференціювальних кіл. Розглянемо його вплив на характеристики окремих кіл. Якщо жорстким зворотним зв'язком охопити аперіодичне коло першого порядку (рис.7.6, а), то передаточна функція скорегованого кола

$$K_{\text{ск}}(p) = \frac{K_{\text{вих}}(p)}{1 + K_{\text{вих}}(p)K_{\text{кор}}(p)} = \frac{\frac{K_{\text{вих}}}{1 + j\omega\tau_{\text{вих}}}}{1 + \frac{K_{\text{вих}}}{1 + j\omega\tau_{\text{вих}}}K_{\text{кор}}} =$$

$$= \frac{K_{\text{вих}}}{1 + j\omega\tau_{\text{вих}} + K_{\text{вих}}K_{\text{кор}}} = \frac{K_{\text{вих}}}{1 + K_{\text{вих}}K_{\text{кор}}} \cdot \frac{1}{1 + j\omega\frac{\tau_{\text{вих}}}{K_{\text{вих}}K_{\text{кор}}}} = \frac{K_{\text{ск}}}{1 + j\omega\tau_{\text{ск}}},$$

де $K_{\text{ск}} = \frac{K_{\text{вих}}}{1 + K_{\text{вих}}K_{\text{кор}}}$ та $\tau_{\text{ск}} = \frac{\tau_{\text{вих}}}{K_{\text{вих}}K_{\text{кор}}}$ – відповідно коефіцієнт передачі та стала часу скорегованого кола; $K_{\text{вих}}$ та $\tau_{\text{вих}}$ – відповідно коефіцієнт передачі та стала часу вихідного аперіодичного кола першого порядку; $K_{\text{кор}}$ – коефіцієнт передачі корегувального кола в колі зворотного зв'язку.

Таким чином, використання жорсткого зворотного зв'язку не змінює характеру вихідного кола, покращує швидкодію ($\tau_{\text{ск}}$ зменшується), але зменшує коефіцієнт передачі скорегованого кола (рис.7.6, б). Для виключення цього недоліку використовують комбіновану корекцію, тобто послідовно з скорегованим колом додатково включають ще одне корегувальне коло з передаточною функцією $K_{\text{кор.2}} = 1 + K_{\text{вих}}K_{\text{кор}}$. В результаті передаточна функція скорегованого кола буде мати вигляд

$$K_{\text{ск}}(p) = \frac{K_{\text{вих}}}{1 + p\tau_{\text{ск}}}.$$

Якщо жорстким зворотним зв'язком охопити ідеальне інтегрувальне коло з передаточною функцією $K_{\text{вих}}(p) = \frac{K_{\text{вих}}}{p\tau_{\text{вих}}}$, то передаточна функція

скорегованого кола

$$K_{ск}(p) = \frac{\frac{K_{вих}}{p\tau_{вих}}}{1 + \frac{K_{вих}}{p\tau_{вих}} K_{кор}} = \frac{K_{вих}}{p\tau_{вих} + K_{вих} K_{кор}} = \frac{\frac{1}{K_{кор}}}{1 + p \frac{\tau_{вих}}{K_{вих} K_{кор}}} = \frac{K_{ск}}{1 + p\tau_{ск}},$$

тобто отримаємо аперіодичне коло першого порядку з параметрами

$$K_{ск} = \frac{1}{K_{кор}} \text{ та } \tau_{ск} = \frac{\tau_{вих}}{K_{вих} K_{кор}} \text{ (змінюється тип кола).}$$

Таким чином, розглянутий тип жорсткого зворотного зв'язку слід використовувати в тих випадках, коли потрібно зменшити порядок астатизму системи РА, тобто виключити вплив інтегрувального кола в системі.

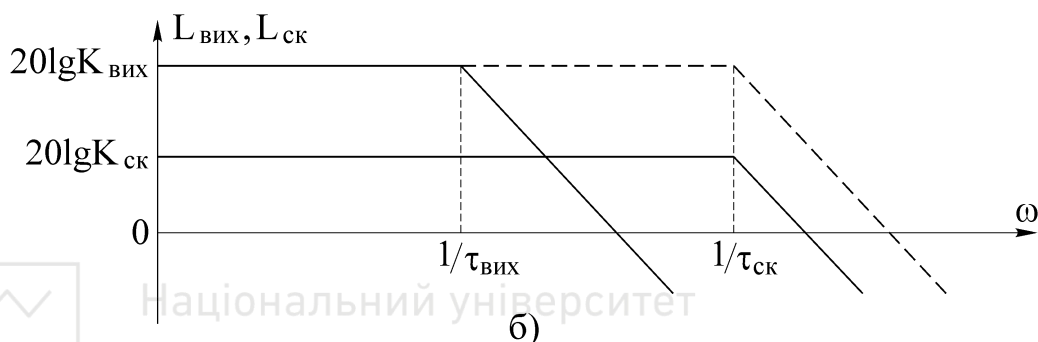
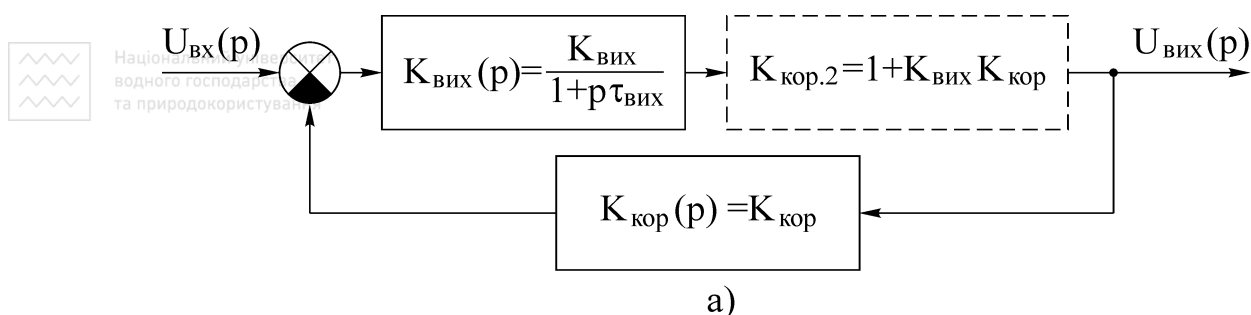


Рисунок 7.6 – До принципу дії жорсткого зворотного зв'язку:
а – структурна схема; б – логарифмічні АЧХ

Гнучкий зворотний зв'язок реалізується за допомогою ідеальних та інерційних диференціювальних кіл, тому він діє тільки в перехідному процесі, що не зменшує точності скорегованої системи в усталеному режимі. Оцінимо вплив гнучкого зворотного зв'язку на характеристики різних кіл системи РА. Якщо таким зворотним зв'язком з передаточною функцією

$$K_{кор}(p) = \frac{K_{кор} p \tau_{кор}}{1 + p \tau_{кор}}$$

коло з передаточною функцією

$$K_{ск}(p) = \frac{K_{вих}}{1 + K_{вих} \frac{K_{кор} p \tau_{кор}}{1 + p \tau_{кор}}} = \frac{K_{вих} (1 + p \tau_{кор})}{1 + p \tau_{кор} + K_{вих} K_{кор} p \tau_{кор}} =$$

$$= \frac{K_{вих} (1 + p \tau_{кор})}{1 + p \tau_{кор} (1 + K_{вих} K_{кор})} = \frac{K_{вих} (1 + p \tau_{кор})}{1 + p \tau_{ск}}, \quad \tau_{ск} > \tau_{кор}.$$
(7.32)

Таким чином, використання розглянутого типу гнучкого зворотного зв'язку еквівалентно включенню в коло сигналу помилки системи послідовного корегувального кола з запізненням за фазою (рис.7.7, а).

Якщо гнучким зворотним зв'язком з передаточною функцією $K_{кор}(p) = p \tau_{кор}$ охопити аперіодичне коло першого порядку, то отримаємо скореговане коло з передаточною функцією



Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$K_{кор}(p) = \frac{K_{вих}}{1 + \frac{K_{вих}}{1 + p \tau_{вих}} p \tau_{кор}} = \frac{K_{вих}}{1 + p \tau_{вих} + K_{вих} p \tau_{кор}} =$$

$$= \frac{K_{вих}}{1 + p (\tau_{вих} + K_{вих} \tau_{кор})} = \frac{K_{вих}}{1 + p \tau_{ск}}, \quad \tau_{ск} > \tau_{вих}.$$
(7.33)

Таким чином, використання розглянутого типу гнучкого зворотного зв'язку не зменшує коефіцієнта передачі скорегованої системи, але зменшує смугу пропускання, що призводить до збільшення інерційності скорегованої системи (рис.7.7, б). При цьому тип скорегованого кола не відрізняється від типу вихідного кола.

Якщо гнучким зворотним зв'язком з передаточною функцією $K_{кор}(p) = \frac{K_{кор} p \tau_{кор}}{1 + p \tau_{кор}}$ охопити ідеальне інтегрувальне коло з передаточною функцією $K_{вих}(p) = \frac{K_{вих}}{p \tau_{вих}}$, то передаточна функція скорегованого кола

$$K_{ск}(p) = \frac{\frac{K_{вих}}{p \tau_{вих}}}{1 + \frac{K_{вих}}{p \tau_{вих}} \cdot \frac{K_{кор} p \tau_{кор}}{1 + p \tau_{кор}}} = \frac{K_{вих} (1 + p \tau_{кор})}{p \tau_{вих} + p^2 \tau_{вих} \tau_{кор} + p K_{вих} K_{кор} \tau_{кор}} =$$

$$= \frac{K_{вих} (1 + p \tau_{кор})}{p (\tau_{вих} + K_{вих} K_{кор} \tau_{кор} + p \tau_{вих} \tau_{кор})} = \frac{K_{вих}}{p \tau_{ск}} \cdot \frac{1 + p \tau_{кор}}{1 + p \frac{\tau_{вих} \tau_{кор}}{\tau_{ск}}},$$
(7.34)

де $\tau_{ск} = \tau_{вих} + K_{вих} K_{кор} \tau_{кор}$ – стала часу скорегованого кола.

З останнього співвідношення виходить, що використання розглянутого типу гнучкого зворотного зв'язку еквівалентно послідовному включенню в коло сигналу помилки системи РА кола з випередженням за фазою, при цьому астатизм системи РА не зменшується (рис.7.7, в).

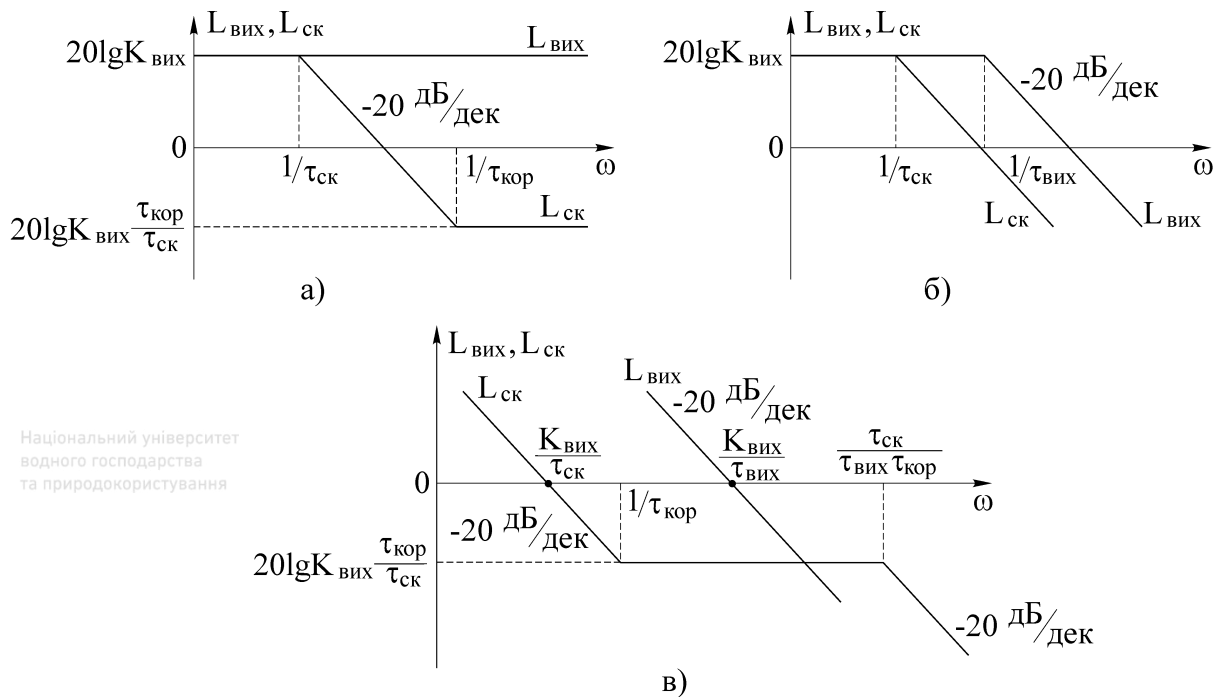


Рисунок 7.7 – Логарифмічні АЧХ, що пояснюють принцип дії гнучкого зворотного зв'язку

Для створення такого типу зворотного зв'язку використовуються тахогенератори, гіроскопічні датчики частоти обертання, а також РС – кола. На рис.7.8, а наведена схема інерційного диференціувального кола, передаточна

функція якого визначається як $K_{\text{диф}}(p) = \frac{K_{\text{диф}} p \tau_{\text{диф}}}{1 + p \tau_{\text{диф}}}$. Сигнал на виході такого

кола в деякому визначеному діапазоні частот пропорційний першій похідній вхідної напруги $U_{\text{вх}}(t)$.

В системах РА використовуються кола з гнучким зворотним зв'язком, вихідний сигнал яких пропорційний другій похідній вхідного сигналу зворотного зв'язку. Такий зворотний зв'язок (рис.7.8, б) можна сформулювати за допомогою тахометра та інерційного диференціувального РС – кола, якщо вхідним сигналом кола зворотного зв'язку є кут повороту, або за допомогою інерційного диференціувального кола другого порядку, наведеного на рис.7.8, в, якщо на вхід подається сигнал змінного струму. Передаточна функція такого кола

$$K(p) = \frac{\tau_1 \tau_2 p^2}{\tau_1 \tau_2 p^2 + \left[\tau_2 \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) + \tau_1 \right] p + 1}, \quad (7.35)$$

де $\tau_1 = R_1 C_1$; $\tau_2 = R_2 C_2$.

Якщо виконується умова $R_1 \ll R_2$, то наближено можна прийняти, що

$$K(p) = \frac{\tau_1 \tau_2 p^2}{\tau_1 \tau_2 p^2 + (\tau_1 + \tau_2)p + 1} = \frac{\tau_1 \tau_2 p^2}{(1 + p\tau_1)(1 + p\tau_2)}. \quad (7.36)$$

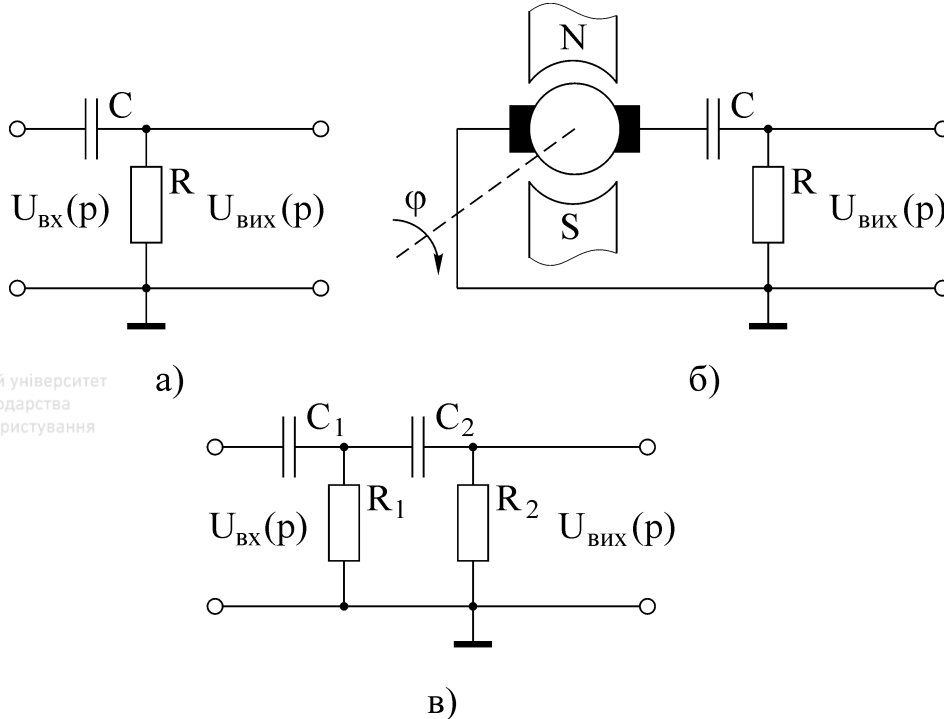


Рисунок 7.8 – Електричні кола для реалізації гнучкого зворотного зв'язку: а – інерційне диференціальне RC – коло; б – коло з електромеханічним датчиком кута повороту; в – інерційне диференціальне RC – коло другого порядку

Приклад 7.1. Синтезувати систему РА, структурна схема якої наведена на рис.7.9, та знайти передаточні функції корегувальних пристроїв за умови забезпечення в системі смуги пропускання $\Delta\omega = 10$ рад/с. Показник коливальності системи не повинен перевищувати 1.4, помилка за положенням дорівнює нулю, помилка за швидкістю – не більше 0.00175 рад та помилка за прискоренням – не більше 0.0087 рад при максимальних значеннях похідних сигналу 0.175 рад/с та 0.35 рад/с. Параметри пристроїв вихідної частини системи: $K_{\Pi} = 0.035$ В/рад;

$$K_{\Phi Д} = 0.8; K_{\Pi\Pi} = 10; K_A = 143 \frac{\text{рад}}{\text{с} \cdot \text{В}}; \tau_{\Pi} = \tau_{\Phi Д} = \tau_{\Pi\Pi} = 0.01 \text{ с}; \tau_A = 0.02 \text{ с}.$$

Передаточна функція вихідної частини системи

$$K_{\text{роз.вих}}(p) = K_{\Pi}(p)K_{\Phi Д}(p)K_{\Pi\Pi}(p)K_A(p) = \frac{K_{\Pi}K_{\Phi Д}K_{\Pi\Pi}K_A}{p(1 + p\tau_{\Pi})(1 + p\tau_{\Phi Д})(1 + p\tau_{\Pi\Pi})(1 + p\tau_A)}, \quad (7.37)$$

де $K_{\Pi}(p)$, $K_{\Phi Д}(p)$, $K_{\Pi\Pi}(p)$ та $K_A(p)$ – відповідно передаточні функції приймача, фазового детектора, підсилювача потужності та антени з двигуном та редуктором.

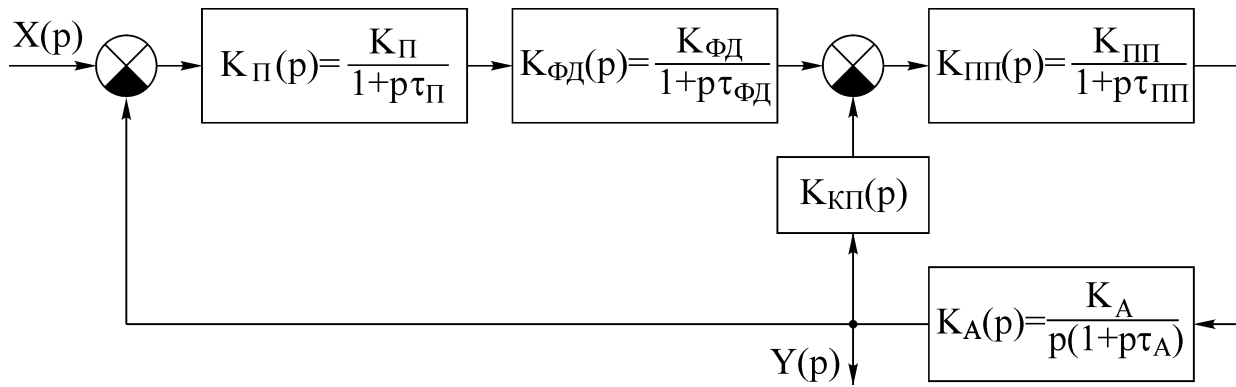


Рисунок 7.9 – Структурна схема досліджуваної системи РА

Коефіцієнт передачі вихідної частини системи

$$K_{\text{роз.вих}} = K_{\text{П}} K_{\text{ФД}} K_{\text{ПП}} K_{\text{А}} = 0.035 \cdot 0.8 \cdot 10 \cdot 143 = 40 \text{ с}^{-1}. \quad (7.38)$$

З врахуванням вимог до системи та співвідношень (7.9) ÷ (7.12) отримаємо:

$$\gamma = -\arcsin \frac{1}{M} = -\arcsin \frac{1}{1.4} = -0.785 \text{ рад};$$

$$\omega_{\text{зр}} = \frac{\Delta\omega}{2 \cos \gamma} = \frac{10}{2 \cos 0.785} = 7 \text{ рад/с};$$

$$C_0 = 0;$$

$$C_1 = \frac{E_{\dot{X}}}{\dot{X}_m} = \frac{0.00175}{0.175} = 0.01 \text{ с};$$

$$C_2 = \frac{2 E_{\ddot{X}}}{\ddot{X}_m} = \frac{2 \cdot 0.0087}{0.35} = 0.05 \text{ с}^2;$$

$$K = \frac{1}{C_1} = \frac{1}{0.01} = 100 \text{ с}^{-1}.$$

В якості бажаної передаточної функції розімкненої системи приймемо функцію, що визначається співвідношенням (7.7). Всі частоти спрягнення передаточних функцій пристроїв вихідної частини системи РА

$$\left(\omega_{\text{П}} = \frac{1}{\tau_{\text{П}}} = 100 \text{ рад/с}; \right. \\ \left. \omega_{\text{ФД}} = \frac{1}{\tau_{\text{ФД}}} = 100 \text{ рад/с}; \quad \omega_{\text{ПП}} = \frac{1}{\tau_{\text{ПП}}} = 100 \text{ рад/с}; \quad \omega_{\text{А}} = \frac{1}{\tau_{\text{А}}} = 50 \text{ рад/с} \right) \text{ більше}$$

потрібної частоти зрізу, тому для спрощення керувальних пристроїв включимо передаточну функцію вихідної частини системи до складу бажаної передаточної функції. В результаті отримаємо

$$K_{\text{роз.баж}}(p) = \frac{K(1 + p\tau_1)^2}{p^2(1 + p\tau_2)^2(1 + p\tau_3)(1 + p\tau_{\text{П}})(1 + p\tau_{\text{ФД}})(1 + p\tau_{\text{ПП}})(1 + p\tau_{\text{А}})}. \quad (7.39)$$

Сталі часу τ_1 , τ_2 та τ_3 обчислюємо за співвідношеннями (7.19) та (7.20):

$$\tau_1 = \frac{K C_2}{4 \left(\sqrt{\frac{K}{\omega_{зр}}} - 1 \right)} = \frac{100 \cdot 0.05}{4 \left(\sqrt{\frac{100}{7}} - 1 \right)} = 0.45 \text{ с};$$

$$\tau_2 = \tau_1 \sqrt{\frac{K}{\omega_{зр}}} = 0.45 \sqrt{\frac{100}{7}} = 1.7 \text{ с};$$

$$\tau_3 = \frac{1}{\omega_{зр}} \operatorname{tg} \left(90^\circ + \gamma + 2 \operatorname{arctg} \omega_{зр} \tau_1 - 2 \operatorname{arctg} \omega_{зр} \tau_2 \right) =$$

$$= \frac{1}{7} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - 0.785 + 2 \operatorname{arctg} 3.15 - 2 \operatorname{arctg} 11.9 \right) = 0.015 \text{ с}.$$

Тому що значення сталої часу τ_3 незначно відрізняється від сталої часу двигуна $\tau_A = 0.02 \text{ с}$, то для спрощення корегувального пристрою приймаємо $\tau_3 = \tau_A$.

Передавальну функцію послідовного корегувального пристрою знайдемо, використовуючи співвідношення (7.22):

$$K_{\text{кор. посл}}(p) = K_{\text{кор. посл}} \frac{1 + p\tau_1}{1 + p\tau_2} \cdot \frac{1 + p\tau_1}{1 + p\tau_2}, \quad (7.40)$$

де $K_{\text{кор. посл}} = \frac{K}{K_{\text{роз. вих}}} = \frac{100}{40} = 2.5$ – коефіцієнт передачі послідовного корегувального пристрою.

Перший множник в співвідношенні (7.40) реалізуємо у вигляді послідовного корегувального пристрою, включеного після фазового детектора, а другий – через еквівалентний зворотний зв'язок, передавальну функцію якого розраховуємо за співвідношенням (7.26). Таким чином,

$$K_{\text{кор. зз}}(p) = K_0 \frac{p^2 (1 + p\tau_{\text{ПП}})(1 + p\tau_A)}{1 + p\tau_1} \approx \frac{K_0 p^2}{1 + p\tau_1}, \quad (7.41)$$

де $K_0 = \frac{\tau_2 - \tau_1}{K_{\text{ПП}} K_A} = \frac{1.7 - 0.45}{10 \cdot 143} = 9 \cdot 10^{-4}$ – коефіцієнт передачі кола зворотного зв'язку.

В співвідношенні (7.41) ми знехтували сталими часу $\tau_{\text{ПП}}$ та τ_A , тому що відповідні їм частоти спрагнення набагато більші частоти зрізу. Зворотний зв'язок з передавальною функцією вигляду (7.41) можна реалізувати за допомогою тахогенератора та інерційного диференціального RC – кола (рис.7.8, б) з сталою часу τ_1 . Передавальна функція такого зворотного зв'язку

$$K_{\text{кор. зз}}(p) = K_{\text{П.О}} K_{\text{П}} p \frac{p^2}{1 + p\tau_1} = K_0 \frac{p^2 \tau_1}{1 + p\tau_1}, \quad (7.42)$$

де $K_{\text{П}}$ – коефіцієнт передачі тахогенератора; $K_{\text{П.О}} = \frac{K_0}{K_{\text{П}} \tau_1}$ – коефіцієнт підсилення підсилювача в колі зворотного зв'язку.

Тому що при синтезі системи РА були припущені спрощення, то необхідно перевірити виконання заданих вимог. Тому будують ЛАЧХ і ЛФЧХ спроектованої системи та ЛАЧХ і ЛФЧХ, що відповідають передаточній функції (7.39). З порівняння цих частотних характеристик можна зробити висновок, чи всі задані показники якості спроектованої системи РА реалізуються.

7.4 Комплексні системи радіоавтоматики

Системи РА, які формуються не тільки на базі радіотехнічних пристроїв, але й на базі пристроїв інших типів (наприклад, гіроскопічних та електро-механічних приладів, інерційних систем і т. і.), носять назву комплексних. Такі системи використовуються в радіонавігації для визначення координат і параметрів руху різних об'єктів (наприклад, для визначення швидкості літального апарату та кута відхилення від розрахункової траєкторії використовується гіроскопічна система з доплеровським вимірювачем). Для вимірювання висоти використовуються барометричний та радіолокаційний висотоміри. Для комплексної системи РА характерна наявність декількох паралельних каналів з різними датчиками вимірювання однієї інформації. На рис.7.10 наведена типова структурна схема комплексної вимірювальної системи, для якої вхідний сигнал $X(p)$ вимірюється різнотипними датчиками з передаточними функціями $K_{д.і}(p)$ та далі потрапляє на фільтри з передаточними функціями $K_{ф.і}(p)$. Завади $\vartheta_i(p)$ враховують шуми датчиків. Комплексування системи полягає в обчисленні оцінки $\hat{Y}(p)$ з точністю, яка перевищує максимальну при роздільному використанні датчиків. З рис.7.10 видно, що перетворення Лапласа для оцінки дорівнює

$$\hat{Y}(p) = \sum_{i=1}^N K_{д.і}(p) K_{ф.і}(p) X(p) + \sum_{i=1}^N K_{д.і}(p) K_{ф.і}(p) \vartheta_i(p). \quad (7.43)$$

Перетворення Лапласа для помилки

$$E(p) = X(p) - \hat{Y}(p) = \left\{ 1 - \sum_{i=1}^N K_{д.і}(p) K_{ф.і}(p) \right\} X(p) - \sum_{i=1}^N K_{д.і}(p) K_{ф.і}(p) \vartheta_i(p). \quad (7.44)$$

З останнього співвідношення виходить, що якщо передаточні функції каналів системи вибирають за умови

$$\sum_{i=1}^N K_{д.і}(p) K_{ф.і}(p) = 1, \quad (7.45)$$

то співвідношення (7.43) та (7.44) приймають такий вигляд:

$$\begin{aligned} \hat{Y}(p) &= X(p) + \sum_{i=1}^N K_{д.і}(p) K_{ф.і}(p) \vartheta_i(p); \\ E(p) &= - \sum_{i=1}^N K_{д.і}(p) K_{ф.і}(p) \vartheta_i(p). \end{aligned} \quad (7.46)$$

Таким чином, помилка комплексної системи не залежить від характеристик вимірюваного сигналу $X(t)$ і визначається тільки помилками датчиків $\vartheta_i(t)$.

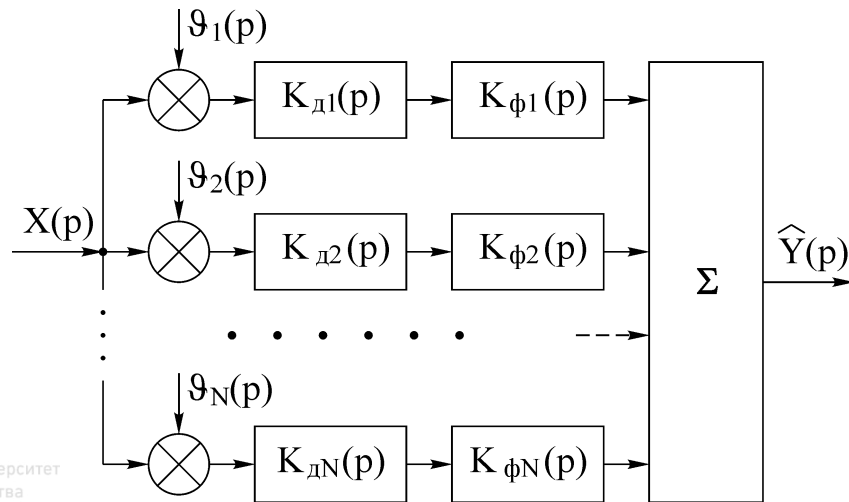


Рисунок 7.10 – Типова структурна схема комплексної вимірювальної системи

Співвідношення (7.45) називають умовою інваріантності, а систему, в якій її можна реалізувати – інваріантною відносно помилки вимірюваного сигналу. Умова інваріантності накладає обмеження тільки на сумарну передаточну функцію, але не на передаточні функції окремих каналів, тому при синтезі комплексної системи залишається деякий вибір для передаточних функцій окремих каналів, що дозволяє зменшити похибку через наявність помилок у датчиків.

Відзначимо, що умову інваріантності (7.45) в динамічних системах РА можна виконати лише наближено, тому в реальній системі динамічна помилка не буде дорівнювати нулю (вона може бути значно зменшена в порівнянні з помилками вимірювання при використанні одного вимірювального каналу).

Слід також мати на увазі, що розглянута система, яку прийнято називати багатоканальною схемою фільтрації, чутлива до відхилення параметрів від розрахункових значень, тому при проектуванні таких систем необхідно забезпечити стабільність параметрів її пристроїв.

Розглянемо ще один клас комплексних систем РА, основою яких є звичайна система РА зі зворотним зв'язком, а сигнал з нерадіотехнічного датчика, за допомогою якого вимірюється вхідний сигнал $X(t)$, вводять до замкнутого контуру після дискримінатора (рис.7.11). В таких системах РА можна значно збільшити точність відносно вхідного (вимірюваного) сигналу без збільшення середньоквадратичної помилки, обумовленої дією завад.

З рис.7.11 виходить, що перетворення Лапласа для вихідного сигналу

$$Y(p) = \frac{K_2(p)[K_1(p) + K_{д}(p)K_{\phi}(p)]}{1 + K_1(p)K_2(p)} X(p) + \frac{K_1(p)K_2(p)}{1 + K_1(p)K_2(p)} \xi(p), \quad (7.47)$$

а для помилки системи –

$$E(p) = X(p) - Y(p) = \frac{1 - K_d(p)K_\phi(p)K_2(p)}{1 + K_1(p)K_2(p)} X(p) - \frac{K_1(p)K_2(p)}{1 + K_1(p)K_2(p)} \xi(p). \quad (7.48)$$

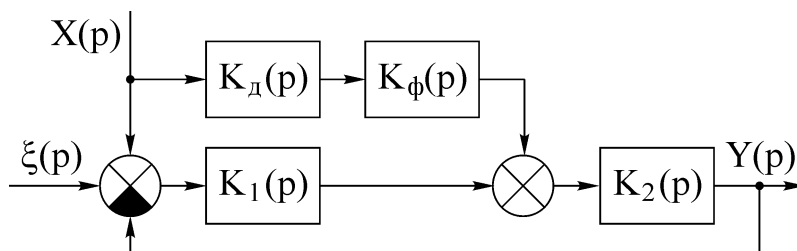


Рисунок 7.11 – Структурна схема комплексної системи РА

Якщо виконується умова інваріантності

$$K_d(p)K_\phi(p)K_2(p) = 1, \quad (7.49)$$

то співвідношення (7.47) та (7.48) набувають вигляду

$$\begin{aligned} Y(p) &= X(p) + K_{\text{зам}}(p)\xi(p); \\ E(p) &= -K_{\text{зам}}(p)\xi(p), \end{aligned} \quad (7.50)$$

де $K_{\text{зам}}(p) = \frac{K_1(p)K_2(p)}{1 + K_1(p)K_2(p)}$ – передаточна функція замкненого контуру системи.

З співвідношення (7.50) виходить, що помилка відносно вхідного сигналу $X(t)$ дорівнює нулю або інваріантна відносно цього сигналу. Шляхом вибору параметрів кола сигналу помилки системи з передаточною функцією $K_1(p)$ неважко сформувати замкнений контур системи РА з врахуванням потрібної фільтрації завад.

Датчик, який вимірює вхідний сигнал $X(t)$, та послідовно включений з ним фільтр, що має передаточну функцію $K_\phi(p)$, утворюють коло компенсації комплексної системи РА. Це коло не формує замкненого контуру, тому не впливає на стійкість комплексної системи.

Розглянемо можливість реалізації умови інваріантності (7.49). В реальних системах РА степінь поліному чисельника передаточних функцій пристроїв завжди менша степеня поліному їх знаменника, тому співвідношення (7.49) не задовольняє умову фізичної реалізованості і в такій системі РА інваріантність помилки відносно вхідного сигналу буде недосяжною. Однак в подібних системах можна суттєво збільшити точність відносно вхідного сигналу при необхідній фільтрації завад, тобто зробити систему широкосмуговою відносно вхідного сигналу та вузькосмуговою відносно завади.

Синтез комплексних систем РА можна реалізувати з врахуванням таких умов:

- 1) забезпечення потрібних частотних характеристик системи;
- 2) підвищення динамічної точності її роботи.

Проаналізуємо метод, який дозволяє збільшити порядок астатизму в комплексній системі відносно вхідного сигналу в порівнянні з порядком астатизму замкненого контуру. Передаточна функція для помилки системи з співвідношення (7.48) має вигляд

$$K_{E.K}(p) = \frac{1 - K_D(p)K_\Phi(p)K_2(p)}{1 + K_1(p)K_2(p)} = K_E(p)\{1 - K_D(p)K_\Phi(p)K_2(p)\}, \quad (7.51)$$

де $K_E(p) = \frac{1}{1 + K_1(p)K_2(p)} = \frac{1}{1 + K_{\text{роз}}(p)}$ – передаточна функція для помилки замкненого контуру комплексної системи РА.

Розкладемо передаточну функцію для помилки комплексної системи РА (7.51) в степеневий ряд

$$K_{E.K}(p) = C_{0.k} + C_{1.k}p + \frac{1}{2}C_{2.k}p^2 + \dots + \frac{1}{k!}C_{k.k}p^k + \dots + \frac{1}{N!}C_{N.k}p^N. \quad (7.52)$$

Аналогічно запишемо другий множник співвідношення (8.51):

$$1 - K_D(p)K_\Phi(p)K_2(p) = D_0 + D_1p + \frac{1}{2}D_2p^2 + \dots + \frac{1}{k!}D_kp^k + \dots + \frac{1}{N!}D_Np^N. \quad (7.53)$$

Тоді передаточна функція для помилки комплексної системи РА з врахуванням співвідношення (6.14) набуде вигляду

$$\begin{aligned} C_{0.k} + C_{1.k}p + \frac{1}{2}C_{2.k}p^2 + \dots + \frac{1}{k!}C_{k.k}p^k + \dots + \frac{1}{N!}C_{N.k}p^N = \\ = \left(C_0 + C_1p + \frac{1}{2}C_2p^2 + \dots + \frac{1}{k!}C_kp^k + \dots + \frac{1}{N!}C_Np^N \right) \times \\ \times \left(D_0 + D_1p + \frac{1}{2}D_2p^2 + \dots + \frac{1}{k!}D_kp^k + \dots + \frac{1}{N!}D_Np^N \right), \end{aligned} \quad (7.54)$$

де C_k – коефіцієнти помилок передаточної функції для помилки замкненого контуру системи РА.

Прирівнявши в останньому співвідношенні складові при однакових ступенях p , знайдемо коефіцієнти помилок комплексної системи РА:

$$\begin{aligned} C_{0.k} &= C_0D_0; \\ C_{1.k} &= C_0D_1 + C_1D_0; \\ C_{2.k} &= C_0D_2 + 2C_1D_1 + C_2D_0; \\ &\dots \end{aligned} \quad (7.55)$$

З співвідношень (7.55) виходить, що необхідний порядок астатизму забезпечується, якщо відповідна кількість коефіцієнтів D_k дорівнює нулю. З

цих умов і визначається співвідношення для передаточної функції компенсації комплексної системи РА.

Підставимо співвідношення

$$K_2(p) = \frac{c_\ell p^\ell + c_{\ell-1} p^{\ell-1} + \dots + c_k p^k + \dots + c_1 p + c_0}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_k p^k + \dots + b_1 p + b_0}; \quad (7.56)$$

$$K_K(p) = K_D(p) K_\Phi(p) = \frac{\alpha_q p^q + \alpha_{q-1} p^{q-1} + \dots + \alpha_k p^k + \dots + \alpha_1 p + \alpha_0}{\beta_q p^q + \beta_{q-1} p^{q-1} + \dots + \beta_k p^k + \dots + \beta_1 p + \beta_0} \quad (7.57)$$

в формулу (7.53). Тоді для отримання астатизму першого порядку необхідно, щоб передаточна функція кола компенсації визначалася співвідношенням

$$K_K(p) = \frac{\alpha_0}{\beta_0}. \quad (7.58)$$

Коефіцієнти цієї функції визначимо з умови

$$D_0 = \frac{b_0 \beta_0 - \alpha_0 c_0}{b_0 \beta_0} = 1 - \frac{\alpha_0 c_0}{b_0 \beta_0} = 0. \quad (7.59)$$

Для отримання астатизму другого порядку необхідно, щоб передаточна функція кола компенсації визначалась співвідношенням

$$K_K(p) = \frac{\alpha_1 p + \alpha_0}{\beta_1 p + \beta_0}. \quad (7.60)$$

Коефіцієнти функції знайдемо з умови (7.59) при

$$D_1 = \frac{b_1 \beta_0 + b_0 \beta_1 - \alpha_0 c_1 - \alpha_1 c_0}{b_0 \beta_0} = 0. \quad (7.61)$$

При послідовному визначенні коефіцієнтів передаточної функції (7.57) одні з коефіцієнтів, наприклад, β_k , вибирають з умови забезпечення потрібних характеристик комплексної системи, а коефіцієнти α_k обчислюють згідно з рівністю нулю відповідних коефіцієнтів D_k .

Коефіцієнти β_k передаточної функції кола компенсації визначають інерційність кола компенсації. Для з'ясування їх впливу на частотні характеристики представимо передаточну функцію комплексної системи у вигляді

$$K_{K.зам}(p) = K_{зам}(p) \left\{ 1 + \frac{K_K(p)}{K_1(p)} \right\}. \quad (7.62)$$

Таким чином, наявність кола компенсації в комплексній системі еквівалентно послідовному включенню з замкненим контуром корегувального пристрою з передаточною функцією

$$K_{кор.посл}(p) = 1 + \frac{K_K(p)}{K_1(p)}. \quad (7.63)$$

З співвідношення (7.63) виходить, що чим менша інерційність кола компенсації, тим більший випереджувальний ефект утворюється корегувальним пристроєм. При цьому смуга пропускання комплексної системи РА відносно вхідного сигналу $X(t)$ збільшується.

Приклад 7.2. Знайти передаточну функцію кола компенсації для системи РА, розглянутої в прикладі 7.1, якщо порядок астатизму в системі відносно вхідного сигналу дорівнює двом, $\beta_0 = 1$, а $\beta_1 = 0.01$ с.

Систему РА сформуємо за структурною схемою рис.7.11, для якої передаточні функції визначаються такими співвідношеннями:

$$K_1(p) = \frac{K_1(1 + p\tau_1)}{(1 + p\tau_{\Pi})(1 + p\tau_{\Phi Д})(1 + p\tau_2)};$$

$$K_2(p) = \frac{c_1 p + c_0}{b_3 p^3 + b_2 p^2 + b_1 p},$$

де $K_1 = K_{\Pi} K_{\Phi Д} K_{К.зам}$; $c_1 = K_{\Pi\Pi} K_A \tau_1$; $c_0 = K_{\Pi\Pi} K_A$; $b_3 = \tau_{\Pi\Pi} \tau_A \tau_1$; $b_2 = \tau_{\Pi\Pi} \tau_A + \tau_A \tau_1$; $b_1 = \tau_{\Pi\Pi} + \tau_A + \tau_1 + K_{\Pi\Pi} K_A K_0 = \tau_{\Pi\Pi} + \tau_A + \tau_2$.

Замкнений контур досліджуваної системи має перший порядок астатизму, тому для отримання в комплексній системі астатизму другого порядку необхідно, щоб коефіцієнт D_0 в співвідношенні (7.53) дорівнював нулю. Для цього потрібно, щоб передаточна функція кола компенсації була реалізована у відповідності з співвідношенням (7.60). Параметри кола компенсації обчислюються за умов $\alpha_0 = 0$ та $D_0 = \frac{b_1 \beta_0 - c_0 \alpha_1}{b_1 \beta_0} = 0$. З останнього співвідношення знаходимо, що

$\alpha_1 = \frac{b_1 \beta_0}{c_0}$. Коефіцієнти $\beta_0 = 1$ та $\beta_1 = 0.01$ с вибрані за умови, щоб смуга пропускання системи РА відносно вхідного сигналу була більше смуги пропускання замкнутого контуру. При розрахункових значеннях параметрів системи РА, знайдених в прикладі 7.1, передаточна функція кола компенсації

$$K_K(p) = \frac{\alpha_1 p}{\beta_1 p + \beta_0} = \frac{\frac{b_1 \beta_0}{c_0} p}{\beta_1 p + \beta_0} = \frac{\frac{(\tau_{\Pi\Pi} + \tau_A + \tau_2) \beta_0}{K_{\Pi\Pi} K_A} p}{\beta_1 p + \beta_0} = \frac{(0.01 + 0.02 + 1.7) \cdot 1}{10 \cdot 143} p = \frac{0.0012 p}{0.01 p + 1}.$$

Така передаточна функція може бути реалізована RC – колом та подільником з коефіцієнтом передачі 0.12. Подальше зменшення коефіцієнта β_1 з метою більшого розширення смуги пропускання може бути доцільним, тому що збільшує коефіцієнт передачі подільника. Так, при $\beta_1 = 10^{-4}$ с в колі компенсації необхідно буде використовувати підсилювач з коефіцієнтом передачі 12.

Таким чином, введення кола компенсації з розрахованими параметрами

розширило смугу пропускання відносно вхідного сигналу з 10 рад/с до 37 рад/с.

Контрольні запитання

1. Поясніть постановку задачі проектування систем РА.
2. Що таке бажана передаточна функція системи РА і який вигляд вона може мати?
3. Як визначаються параметри бажаної передаточної функції системи РА?
4. Назвіть способи включення корегувальних пристроїв в системах РА.
5. Опишіть основні схеми, які використовуються в якості диференціювальних пристроїв.
6. Як формується передаточна функція розімкненої проектованої системи?
7. Яким чином визначаються передаточні функції корегувальних пристроїв?
8. За допомогою яких кіл реалізується жорсткий зворотний зв'язок?
9. Які особливості виникають при реалізації жорсткого та гнучкого зворотного зв'язків?
10. Які системи РА відносяться до комплексних?
11. Як можна досягти підвищення порядку астатизму в комплексних системах РА?



Національний університет
водного господарства
та природокористування



Національний університет
водного господарства
та природокористування

ЛІТЕРАТУРА

1. Анализ и синтез систем автоматического управления//Под ред. Б.Н.Петрова. – М.: Наука, 1968. – 405 с.
2. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 224 с.
3. Бендат Дж., Пирсол А. Применения корреляционного и спектрального анализа. – М.: Мир, 1983. – 312 с.
4. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. – М.: Наука, 1975. – 476 с.
5. Бесекерский В.А., Небылов А.В. Робастные системы автоматического управления. – М.: Наука, 1975. – 293 с.
6. Борисов Ю.П. Математическое моделирование радиосистем. – М.: Советское радио, 1976. – 261 с.
7. Ван Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции: Пер. с англ. //Под ред. В.И.Тихонова. Т.1. – М.: Советское радио, 1972. – 301 с.
8. Вашны Е. Динамика измерительных цепей. – М.: Энергия, 1969. – 287 с.
9. Ворон А.А., Титов В.К., Новогранов Б.Н. Основы теории автоматического регулирования и управления. – М.: Высшая школа, 1977. – 326 с.
10. Высокоточные угловые измерения//Д.А.Аникст, К.М.Константинович, И.В.Меськин и другие; Под ред. Ю.Г.Якушенкова. – М.: Машиностроение, 1987. – 480 с.
11. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Радио и связь, 1986. – 512 с.
12. Гостев В.И., Гусовский С.В. Корректирующие устройства автоматики на несущей переменного тока: Справочник. – К.: Техника, 1981. – 208 с.
13. Заде А., Дезоер Ч. Теория линейных систем: Пер. с англ. – М.: Наука, 1970. – 703 с.
14. Иванов А.А. Справочник по электротехнике. – К.: Высшая школа, 1984. – 304 с.
15. Иващенко Н.Н. Автоматическое регулирование. Теория и элементы систем. – М.: Машиностроение, 1978. – 736 с.
16. Коновалов Г.Ф. Радиоавтоматика. –М.: Высшая школа, 1990. –335 с.
17. Кривицкий Б.Х. Автоматические системы радиотехнических устройств. – М.: Госэнергоиздат, 1962. – 189 с.
18. Линдсей В. Системы синхронизации в связи и управлении: Пер. с англ.//Под ред. Ю.Н.Бакаева. – М.: Советское радио, 1978. – 598 с.
19. Метрология, стандартизация и измерения в технике связи//Б.П.Хромой, А.В.Кандинов, А.Л.Сенявский и другие; Под ред. Б.П.Хромого. – М.: Радио и связь, 1986. – 424 с.
20. Нетушил А.В., Пастернак Е.Б., Балтрушевич А.В. и др. Теория автоматического управления. – М.: Высшая школа, 1972. – 430 с.
21. Основы автоматического регулирования и управления//Под ред.

В.М.Пономарёва и А.И.Литвинова. – М.: Высшая школа, 1974. – 283 с.

22. Первачёв С.В. Радиоавтоматика. – М.: Радио и связь, 1982. – 296 с.

23. Первачёв С.В., Валуев А.А., Чиликин В.М. Статистическая динамика радиотехнических следящих систем. – М.: Советское радио, 1973. – 259 с.

24. Радиоавтоматика/Под ред. В.А.Бесекерского. – М.: Высшая школа, 1985. – 271 с.

25. Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления//Под ред. В.А.Бесекерского. – М.: Наука, 1978. – 242 с.

26. Сейдж Э., Мелс Дж. Теория оценивания и её применение в связи и управлении: Пер. с англ.//Под ред. Б.Р.Левина. – М.: Связь, 1976. – 289 с.

27. Сиберт У.М. Цепи, сигналы, системы: В 2-х ч. Ч.1: Пер. с англ. – М.: Мир, 1988. – 336 с.

28. Солодов А.В. Линейные системы автоматического управления с переменными параметрами. – М.: Физматгиз, 1960. – 192 с.

29. Солодовников В.В., Семёнов В.В. Спектральная теория нестационарных систем управления. – М.: Наука, 1974. – 335 с.

30. Солодовников В.В., Дмитриев А.Н., Егупов Н.Д. Спектральные методы расчёта и проектирования систем управления. – М.: Машиностроение, 1986. – 440 с.

31. Справочник по радиоавтоматике//Т.В.Бурсова, Н.В.Градобоева, Н.В.Захарченко и др.; Под ред. В.К.Стеклова. – К.: Техника, 1992. – 246 с.

32. Справочник по радиоэлектронным системам//Под ред. Б.Х.Кривицкого. – М.: Энергия, 1979. – 352 с.

33. Справочник по средствам автоматики//Под ред. В.Э.Низэ и И.В.Антика. – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 504 с.

34. Теоретические основы радиолокации/Под ред. В.Е.Дулевича. – М.: Советское радио, 1978. – 536 с.

35. Теория автоматического управления//Под ред. А.В.Нетушила. Ч.1. – М.: Высшая школа, 1967. – 312 с.

36. Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования. Кн.3. Ч.1//Под ред. В.В.Солодовникова. – М.: Машиностроение, 1969. – 607 с.

37. Топчеев Ю.И., Цыпляков А.П. Задачник по теории автоматического регулирования. – М.: Машиностроение, 1977. – 592 с.

38. Устройства и элементы систем автоматического регулирования и управления. Кн 1÷3/Под ред. В.В.Солодовникова. – М.: Машиностроение, 1976. – 652 с.

39. Цыпкин Я.З. Основы теории автоматических систем. – М.: Наука, 1972. – 560 с.

40. Шахгильдян В.В., Ляховкин А.А. Системы фазовой автоподстройки частоты. – М.: Связь, 1972. – 337 с.

41. Щербаков В.И., Грездов Г.И. Электронные схемы на операционных усилителях: Справочник. – К.: Техника, 1983. – 213 с.

Навчальне видання

РУДИК Андрій Вікторович

РАДІОАВТОМАТИКА



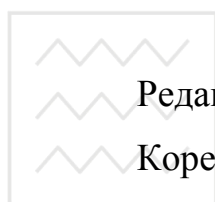
Національний університет
водного господарства
та природокористування

Частина 1

ЛІНІЙНІ СИСТЕМИ РАДІОАВТОМАТИКИ

Навчальний посібник

Оригінал – макет підготовлено автором



Редактор С. А. Малішевська

Коректор З. В. Поліщук

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Підписано до друку 05.04.2001 р.

Формат 29.7x42 $\frac{1}{4}$ Гарнітура Times New Roman

Друк різнографічний Ум. друк. арк. 8.93

Наклад 75 прим.

Зам. № 2001-054

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно–видавничому центрі
Вінницького державного технічного університету
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВДТУ, ГНК, 9-й поверх
Тел. (0432) 44-01-59